11 plates
Paris
1787



COURS
D'HYDROGRAPHIE,
OU
DE NAVIGATION.
TOME PREMIER.

COURS D'HYDROGRAPHIE, OU DE NAVIGATION,

Professé à Paris, & mis à la portée de tous les Navigateurs ;

Par M. DE LASSALE, Professeur de Mathématique & d'Astronomie.

TOME PREMIER.



A LONDRES,

Et se trouve à PARIS chez ROYEZ, Libraire, Quai des Augustins, à la descente du Pont-Neuf.

M. DCC. LXXXVII.

FAUTES ESSENTIELLES
A CORRIGER
avant de lire cet Ouvrage.

TOME I.

PAGE 3, *ligne* 28, ces deux, *lisez* de deux.
9, *lig.* 3, dernières, *lisez* derniers.
9, *lig.* 24, voix, *lisez* voie.
13, *lig.* 12, la ſeconde, *lisez* les ſecondes.
15, *lig.* 1, 4, *lisez* 64.
17, *lig.* 4, ſéparée, *lisez* ſéparé.
19, *lig.* 13, logarith. de ce nombre, *lisez* ce nombre.
28, *à la marge*, (*fig.* 8.) *lisez* (*fig.* 6.)
31, *lig.* 9, AD, *lisez* CAD.
37, *lig.* 23, réduit, *lisez* déduit.
42, *lig.* 17, GHI, *lisez* GDE.
43 & 44, *lisez à la marge* (fig. 25.)
54, *lig.* 4, & par conſéquent, *lisez* & ſont par conſéquent.
64, *lig.* 12, $AD+BC \times AE$, *lisez* $\frac{AD+BC}{2} \times AE$.
64, *lig.* 28, (*fig.* 33.) *lisez* (*fig.* 32.)
82, *lig.* 15, (*fig.* 54.) *lisez* 51.)
91, *lig.* 13, *à la marge*, (*fig.* 57.) *lisez* (*fig.* 53.)
106, *lig.* 27, de l'angle AG, *lisez* l'angle GAH.
113, *lig.* 6, *au lieu de* la longitude & la latitude, *lisez ſeulement* la longitude.

Page 210, ligne 21.

lisez HO : HL : : co-ſ. OHL : R, ou : : ſin. OLH : R
au lieu de HO : HI : : co-ſ. OHI : R, ou : : ſin. OIH : R.

216 & 217, *à la marge* (*fig.* 77.) *lisez* (*fig.* 68.)

EXPLICATION

des Signes employés dans le cours de cet Ouvrage.

- $=$ signifie *égal à*, ou *égale*.
- $+$ signifie *plus*.
- $-$ signifie *moins*.
- $\times$ signifie *multiplié par*.
- $>$ signifie *plus grand que*.
- $<$ signifie *plus petit que*.

DISCOURS PRÉLIMINAIRE.

L'OUVRAGE que je publie aujourd'hui, est ce même *Cours d'Hydrographie* que je donne à Paris depuis 1784. Ce sont exactement les mêmes objets & dans le même ordre ; la seule différence qu'il y a, c'est qu'ici tout est traité par la voie la plus simple de la synthèse, afin qu'il n'y ait rien qui ne soit à la portée de tous les navigateurs : au lieu que dans mes leçons publiques, je suis obligé de m'écarter quelquefois de cette route, & de prendre celle de l'analyse, pour être au goût du petit nombre de mes Auditeurs.

On sera peut-être surpris que dans une ville comme Paris, reculée de la mer, je m'occupe de navigation ; mais on le sera bien plus encore, si l'on considère que, dans cette capitale d'un des plus puissants Etats maritimes de l'Europe, il y a des Cours publics pour toutes les connoissances humaines, & qu'avant l'époque de 1784, il n'y en avoit aucun pour l'Hydrographie, qui tient de si près à la Physique, à l'Astronomie & à la Géographie, & dont la connoissance

importe le plus au bien & à la gloire de notre nation. Car peut-on ignorer aujourd'hui que la navigation, le plus ingénieux de tous les Arts, ne ſoit le reſſort principal de l'induſtrie, du commerce & de l'opulence des nations, & que dans tous les tems elle n'ait donné aux peuples maritimes qui s'y ſont livrés, une diſtinction très-honorable parmi leurs voiſins ?

Les annales de l'Hiſtoire ſont remplies de faits qui atteſtent cette vérité ; & ſans avoir recours au témoignage des ſiècles paſſés, l'état actuel de l'Europe, le degré de puiſſance où ſont parvenus de nos jours certains Etats maritimes, & leur influence ſur les affaires politiques de ce continent, ne ſont-ils pas autant de preuves manifeſtes de ce que j'avance ?

Ces motifs, joints à l'amour particulier que j'ai pour les ſciences Phiſico-Mathématiques, étoient plus que ſuffiſans pour m'engager dans la carrière que j'ai commencée. Animé des mêmes ſentimens que ceux qui m'ont précédé, & jaloux de mériter, comme eux, la confiance du Gouvernement, je ne pouvois donc choiſir un lieu plus convenable à

mes desseins, & plus propre à flatter mon ambition, que le sein d'une capitale, où l'on cultive à l'envi les Sciences & les Arts.

Convaincu de la vérité de ce précepte d'Horace,

... » *& versate diù, quid ferre recusent,*
» *quid valeant humeri* ....

ce n'est qu'après avoir essayé plusieurs fois mes forces, en enseignant publiquement les différentes parties de ce Cours, que j'ose aujourd'hui offrir au Public le fruit de mes travaux.

Cet Ouvrage, dans lequel j'ai tâché de rassembler tout ce qui regarde le Pilotage, est divisé généralement en deux Parties, & subdivisé en six Sections principales.

La premiere Section, comme devant servir de principe & de base à toutes les autres, contient en abrégé la théorie des rapports, proportions & progressions, soit arithmétiques, soit géométriques; la formation & l'usage des logarithmes; quelques proportions élémentaires de Géométrie, suivies de deux petits Traités de Trigonométrie *rectiligne* & *sphérique*,

qui renferment en ſubſtance ce qui eſt abſolument néceſſaire à la démonſtration & à l'intelligence des différentes parties de ce Cours.

J'aurois bien pu ſuppoſer mes Lecteurs imbus des principes mathématiques, ou les renvoyer aux différens Ouvrages qui traitent de ces ſortes de matières; mais ayant particulièrement à cœur de concourir à l'inſtruction des jeunes Marins, & de leur faciliter l'étude de ces élémens, ſi néceſſaires à la perfection de leur état, j'ai préféré les raſſembler ici dans ce tableau raccourci, moins capable de les effrayer que la vue d'un volume entier.

La ſeconde Section renferme ce qu'il y a de plus curieux & de plus eſſentiel à ſavoir ſur la figure & la grandeur de la Terre, ſur ſon mouvement de tranſlation autour du Soleil & de rotation ſur ſon axe. On y voit un précis hiſtorique des travaux des Aſtronomes, pour déterminer la grandeur abſolue de différens degrès de ſon méridien, afin d'avoir, avec plus de préciſion, la diſtance reſpective de tous les points de ſa ſurface. J'y parle des Cartes marines, & des principes de leur conſtruction. J'expoſe les raiſons

principales qui ont engagé les Hydrographes à les adopter de préférence aux Cartes géographiques, pour les uſages ordinaires de la navigation. On trouve enſuite des détails intéreſſans ſur la Bouſſole marine, ſur l'uſage & les propriétés de ſes différentes parties, ſur la manière d'aimanter ſon aiguille & de la ſuſpendre. J'y fais connoître les imperfections & l'inſuffiſance du *Lock*, pour meſurer avec exactitude le ſillage du navire, & l'avantage qu'il y auroit de ſubſtituer au *Lock* le *Sillomètre* de M. *de Gaulle*, inſtrument qui, étant une fois placé, reſte toujours en expérience, & marque à chaque inſtant, avec toute l'exactitude deſirable dans la pratique, & la marche du navire & l'angle de ſa *dérive*. Enfin je termine cette ſeconde Section, par un des objets les plus eſſentiels à la théorie de la navigation, *les principes fondamentaux de la réduction des routes*.

La troiſième Section eſt entièrement employée à la réſolution & au calcul des problêmes généraux de navigation. J'y enſeigne la manière la plus ſimple & la plus commode de pointer les Cartes réduites, & de réſoudre ſur ces Cartes

divers Problêmes de navigation. La clarté qui règne dans cet article, & les détails dont il eſt rempli, me paroiſſent plus que ſuffiſans pour l'intelligence de ces différens objets.

On y voit enſuite une deſcription du Quartier de Réduction, & le fréquent uſage qu'on en fait dans la Marine pour le calcul des routes. A la ſuite de chaque Problême, réſolu à l'aide de cet inſtrument, j'ai ajouté la manière de le réſoudre par la Trigonométrie ; afin que les jeunes Marins puiſſent comparer ces deux méthodes, & ſe convaincre que ces ſolutions ſont au moins auſſi faciles par le calcul que ſur le Quartier de Réduction ; & que les méthodes directes ne ſont aſſujetties à aucune limitation, comme les méthodes graphiques, dont le réſultat ſe reſſent toujours de l'imperfection de l'inſtrument, ou des bornes étroites qui le circonſcrivent.

La quatrième Section, qui a pour titre, *Introduction à l'Aſtronomie nautique*, commence la ſeconde Partie de cet Ouvrage. Après quelques notions préliminaires de la Sphère, je m'y attache particulièrement à expliquer les mouve-

mens propres du Soleil & de la Lune, en remontant à la cauſe de leurs principales inégalités. Je m'étends un peu plus ſur celui de la Lune, ſur-tout en parlant de ſes phaſes & de ſes éclipſes, parce que c'eſt celui de tous les aſtres qui intéreſſe plus particulièrement le navigateur. Comme le flux & reflux de la mer eſt un de ces objets qui intéreſſent le plus grand nombre des Lecteurs, je n'ai rien négligé pour donner à cet article la clarté & l'étendue convenable, pour que l'explication de ce phénomène, qui n'eſt que le réſultat de la comparaiſon entre la théorie & l'obſervation, ſoit à la portée de tout le monde. Avant de faire uſage des règles de la Trigonométrie, pour calculer l'aſcenſion droite, la déclinaiſon & la longitude du Soleil, j'y expoſe, d'une manière générale, les moyens de déterminer la poſition des aſtres dans le ciel. De cette conſidération géométrique, dérivent les deux méthodes dont les Aſtronomes font un uſage continuel; ſavoir, méthode d'obſervation & méthode de calcul. Ils obſervent l'aſcenſion droite & la déclinaiſon des aſtres; &, d'après ces données,

ils calculent leur longitude & leur latitude.

Je passe ensuite au calcul du passage des étoiles au méridien ; calcul très-important sur mer, soit pour se disposer à observer leur hauteur méridienne, soit pour trouver pendant la nuit l'heure précise qu'on doit compter à bord.

Au commencement de la cinquième Section, j'indique quels sont les meilleurs instrumens en usage sur mer pour l'observation des astres. Je me borne ensuite à la description de l'Octant, par lequel ce genre d'instruments a commencé, & dont les principes de construction ont servi de base à celle de tous les autres. J'y considère les merveilleux effets du parallelisme des miroirs qui entrent dans sa composition. J'enseigne la manière de rectifier cet instrument & de s'en servir. Avant de terminer cet article, je dis un mot de ce que les autres ont de particulier, & en quoi ils different de celui-ci. Je passe ensuite à l'examen des erreurs, qui doivent affecter toutes les observations faites sur mer ; je fais voir en quoi elles consistent, la manière de les calculer & d'en tenir compte.

Le reste de cette Section est employé, 1°. à expliquer les méthodes des hauteurs méridiennes & non méridiennes des astres, pour déterminer le jour ou la nuit la latitude du vaisseau; à les discuter, à les comparer ensemble, & à fixer les limites de leurs erreurs; 2°. à exposer les moyens les plus simples & les plus exacts de déterminer, par l'observation, l'heure précise qu'on doit compter à bord; 3°. à faire voir quelles sont les méthodes le plus en usage pour connoître, dans tous les cas, la variation de l'aiguille aimantée, & à marquer celles qu'on doit préférer selon les circonstances.

Enfin, je n'ai rien oublié pour rendre cette partie très-intelligible, & à la portée des navigateurs qui sont desireux de s'instruire & de la connoître.

Dans la sixième & dernière Section, je fais mention de plusieurs méthodes, qui ont été proposées ou tentées en différens tems, pour la recherche des longitudes sur mer. Je fais voir en quoi elles consistent, & le degré de confiance qu'on doit leur donner. Ce n'est que d'après un examen critique & raisonné de tous ces objets, que je m'attache uniquement à

la méthode des *distances* ; méthode praticable en tout tems, & infiniment supérieure à toutes les autres. Je développe, j'explique les principes de cette méthode, & j'entre ensuite dans tous les détails sur la manière de faire les observations & de les calculer, soit qu'il y ait trois observateurs, soit qu'il n'y en ait qu'un.

A la suite de cette dernière Section, on trouve un recueil des Tables astronomiques les plus propres à faciliter & à abréger les calculs du Pilotage.

Si j'ai le mérite d'avoir rassemblé, dans cet Ouvrage élémentaire, les principes les plus essentiels & les meilleures méthodes, je les dois aux différens Auteurs qui ont écrit sur la science Nautique en général, ou sur quelque branche en particulier ; sur-tout aux Mémoires de l'Académie des Sciences, & aux ouvrages de MM. *Bouguer*, *Bézout* & *de Lalande*. Quant à l'ordre & à la clarté qui doivent régner dans toutes ses parties, c'est au Public, c'est à mes Lecteurs à juger si j'ai rempli la tâche que je me suis imposée à cet égard.

TABLE DES MATIERES.

TOME PREMIER.

I. SECTION.

ELÉMENS DE GÉOMÉTRIE.

TRIGONOMÉTRIE RECTILIGNE.

TRIGONOMÉTRIE SPHÉRIQUE.

SECONDE SECTION.

TROISIEME SECTION.

TOME SECOND.

QUATRIEME SECTION.

CINQUIEME SECTION.

ASRONOMIE NAUTIQUE.

SIXIEME SECTION.

RECUEIL

DES TABLES ASTRONOMIQUES

inférées à la fin de cet Ouvrage.

FIN DES TABLES.

COURS



COURS D'HYDROGRAPHIE.



PREMIERE SECTION.

LA navigation, ou l'art de naviguer, ſe diviſe en deux branches principales, le pilotage & la manœuvre.

La première eſt une ſcience dépendante de la Géométrie & de l'Aſtronomie; c'eſt la partie la plus relevée & la plus profonde de l'art de naviguer; & ſous cette dénomination, elle comprend cet aſſemblage de connoiſſances qui ſervent à conduire un vaiſſeau ſur toutes les mers navigables, à déterminer la route qu'il doit ſuivre, à eſtimer la vîteſſe de ſa marche, & à reconnoître, à chaque inſtant, le lieu de la mer où il eſt. C'eſt uniquement de celle-là dont il ſera queſtion dans cet Ouvrage.

La ſeconde eſt entièrement fondée ſur la méchanique & ſur la connoiſſance des puiſſances

motrices du vaisseau, telles que les voiles & le gouvernail. Comme les jeunes marins ont coutume d'apprendre celle-ci par pratique dans le cours de leurs voyages, nous ne nous y arrêterons pas. Nous nous attacherons uniquement à faire connoître les différentes branches du pilotage, & à développer les principes mathématiques & astronomiques qui en sont la base.

Mais avant tout, & quoique l'étude de l'Hydrographie suppose déja une connoissance suffisante de la science des nombres, nous dirons un mot des rapports, proportions & progressions arithmétiques & géométriques, ainsi que de la théorie & des usages des logarithmes, afin de prévenir les difficultés qui pourroient naître de cette source, & embarrasser les commençans.

Des Rapports ou raisons & proportions arithmétiques & géométriques.

Nous n'avons en général que deux manières de comparer toutes les grandeurs ou quantités (1), & par conséquent que deux espèces de rapports, qui sont le fondement de toutes nos connoissances mathématiques.

1... Lorsque dans la comparaison des deux quantités homogènes, on se propose de connoître

(1) On entend en général par grandeur ou quantité, tout ce qui est dans la nature susceptible d'augmentation ou de diminution; & on appelle quantités homogènes, des quantités qui sont de même nature.

de combien l'une surpasse l'autre, ou en est surpassée, le résultat de cette comparaison, qui est la différence de ces deux quantités, se nomme *raison ou rapport arithmétique.*

Par exemple, si je compare 12 avec 8, pour savoir de combien 12 surpasse 8, le nombre 4, qui exprime cet excès, est le rapport arithmétique de 12 à 8; & pour marquer que ces deux quantités ont été comparées sous ce point de vue, on les écrit ainsi, 12 . 8.

2... Lorsque dans la comparaison des deux quantités homogènes, on se propose de connoître combien de fois l'une contient l'autre, ou est contenue en elle, le résultat de cette comparaison se nomme *rapport géométrique.*

Par exemple, si je compare 15 avec 5, pour savoir combien de fois 15 contient 5, le quotient 3, qui exprime ce nombre de fois, est le *rapport géométrique* de 15 à 5; & pour marquer que ces deux quantités sont comparées sous ce point de vue, on les écrit ainsi, 15 : 5, en séparant les deux termes de ce rapport par deux points.

Dans l'un & l'autre de ces rapports, le premier terme se nomme *antécédent*; & le second, *conséquent.*

3... Le rapport soit arithmétique, soit géométrique, n'est donc autre chose que le résultat de la comparaison qu'on a faite de ces deux quantités.

4... Pour avoir le rapport arithmétique entre 12 & 8, par exemple, il faut soustraire le plus petit du plus grand; & leur différence 4, est le rapport arithmétique cherché.

5... Pour avoir le rapport géométrique entre deux quantités, il faut diviser la plus grande par la plus petite, ou la plus petite par la plus grande, cela est indifférent. Ainsi, pour avoir le rapport géométrique de 15 à 5, je puis diviser 15 par 5, ou 5 par 15 : dans le premier cas, j'aurai 3 pour quotient, & dans le second $\frac{5}{15}$; l'un ou l'autre exprimera toujours le rapport de ces deux quantités. Mais lorsqu'il s'agira de savoir si deux rapports géométriques sont égaux, c'est-à-dire, si le rapport de 15 : 5, par exemple, est le même que celui-ci 9 : 3, il faut alors que la division se fasse de la même manière dans chacun.

6... Un rapport arithmétique ne change point par l'addition ou la soustraction d'une même quantité sur chacun de ses deux termes, parce que la différence en quoi consiste ce rapport reste toujours la même.

7... Un rapport géometrique ne change point en multipliant ou en divisant ses deux termes par un même nombre; car le rapport dont il est ici question, consistant dans le quotient de la division de l'antécédent par le conséquent, peut être représenté sous la forme d'une fraction, dont la valeur est invariable, soit qu'on multiplie, soit qu'on divise ses deux termes par un même nombre. Ainsi le rapport de 15 : 5 ou $\frac{15}{5}$, est le même que celui de 30 : 10 ou $\frac{30}{10}$, que l'on a en multipliant les deux termes du premier par 2. Il est aussi le même que celui de 3 : 1, ou $\frac{3}{1}$, que l'on a en les divisant par 5. Cette propriété sert à simplifier tellement les rapports

géométriques, qu'il arrive souvent de résoudre des proportions géométriques, ou regles de trois, par la seule opération de la multiplication ou de la division, toutes les fois qu'il est possible de réduire à l'unité un des termes du premier rapport, ainsi que nous le verrons dans peu.

8... Lorsque quatre quantités sont telles, que le rapport des deux premières est le même que celui des deux dernières, ces quatre quantités forment une proportion, laquelle est arithmétique ou géométrique, selon la nature des rapports. Par exemple, ces quatre quantités, 12, 8, 9, 5, forment une proportion arithmétique, parce que la différence des deux premières est la même que celle des deux dernières. Pour marquer que ces quatre quantités sont en proportion arithmétique, on les écrit ainsi, 12 . 8 : 9 . 5, en séparant le premier rapport du second par deux points; & en l'énonçant, on dit, 12 *est* à 8, *comme* 9 *est* à 5.

Si l'on a deux rapports géométriques égaux, par exemple, 2 : 8, & 3 : 12, ces quatre termes formeront une proportion géométrique, qu'on écrit ainsi, 2 : 8 : : 3 : 12, & on les énonce comme ceux de la proportion arithmétique.

9... Quoique les deux termes de chaque rapport soient toujours de même espèce, puisqu'on ne peut comparer que des quantités homogènes, il n'est pas nécessaire que les quatre termes d'une proportion le soient. Ainsi des toises peuvent être à des toises, comme des degrés sont à des degrés, ou comme des heures sont à des heures, &c.

Le premier & le dernier terme d'une proportion quelconque se nomment les *extrêmes*; le second & le troisième, les *moyens*.

10... Quand les termes moyens d'une proportion sont égaux, la proportion se nomme *continue*. Ces quatre termes, par exemple, 7 . 9 : 9 . 11, forment une proportion arithmétique *continue*, que, pour abréger, on écrit ainsi, ÷ 7 . 9 . 11. Ces quatre autres, 3 : 6 : : 6 : 12, forment une proportion géométrique *continue*, qu'on écrit ainsi, ∺ 3 : 6 : 12. Dans l'une & l'autre de ces proportions, les points & la barre qui précèdent, signifient qu'en l'énonçant il faut répeter deux fois le terme moyen, qu'on nomme aussi *moyen proportionnel*.

11... La propriété fondamentale des proportions arithmétiques est *que la somme des extrêmes est égale à celle des termes moyens*; & dans les proportions continues, *elle est égale au double du terme moyen*.

En partant de ce principe, si l'on vouloit trouver le quatrième terme de cette proportion 13 . 4 : 18 : x, de la somme des deux termes moyens 4 + 18, je retrancherois le premier terme 13, & la différence 9 seroit le quatrième terme demandé. Si la proportion étoit continue, on se conduiroit de la même manière; mais au lieu de la somme des deux moyens, on prendroit le double du moyen proportionnel.

12... La propriété fondamentale des proportions géométriques est *que le produit des extrêmes est égal au produit des termes moyens*, c'est-à-dire,

que dans cette proportion 2 : 8 :: 3 : 12, le produit des deux extrêmes 2×12 eſt le même que celui des moyens 8×3 ; & dans les proportions continues, le produit des extrêmes eſt égal au quarré du terme moyen. En effet, dans cette proportion continue ⫶ 3 : 6 : 12, le produit de 3×12 eſt égal à celui de 6×6, ou au quarré de 6.

13... De la propriété fondamentale des proportions géométriques il ſuit :

1°. Que ſi l'on met les extrêmes d'une proportion à la place des moyens, & les moyens à la place des extrêmes ; ou encore ſi l'on change les places des extrêmes & celles des moyens, ces quatre termes ſeront toujours en proportion, c'eſt-à-dire, qu'on peut faire ſubir huit changemens différens à toute proportion géométrique, par la ſeule permutation de ſes termes, ſans troubler l'ordre qui doit régner entr'eux. Ainſi la proportion 9 : 3 :: 21 : 7, peut fournir de cette manière les huit proportions ſuivantes :

9	:	3	::	21	:	7
9	:	21	::	3	:	7
7	:	21	::	3	:	9
7	:	3	::	21	:	9
3	:	7	::	9	:	21
3	:	9	::	7	:	21
21	:	9	::	7	:	3
21	:	7	::	9	:	3

14... 2°. Si l'on compare la ſomme ou la différence des deux termes de chaque rapport, ſoit avec l'antécédent, ſoit avec le conſéquent, de la

même manière dans chaque rapport, les quatre termes qui en résulteront, seront toujours en proportion : car, puisque la proportion ne consiste que dans le même nombre de fois que chaque antécédent contient son conséquent, ou est contenu en lui, il est évident qu'on ne troublera point cette égalité, si, à chaque antécédent, on ajoute son conséquent, une fois de plus ou une fois de moins.

En supposant toujours la même proportion $9 : 3 :: 21 : 7$,

on aura par addition, $\begin{cases} 9 + 3 : 9 :: 21 + 7 : 21 \\ 9 + 3 : 3 :: 21 + 7 : 7 \end{cases}$

par soustraction, $\begin{cases} 9 - 3 : 9 :: 21 - 7 : 21 \\ 9 - 3 : 3 :: 21 - 7 : 7 \end{cases}$

15... Donc puisque nous venons de voir qu'on peut mettre le troisième terme à la place du second, sans troubler l'ordre d'une proportion, on peut dire que *la somme des antécédens est à la somme des conséquens, ou que la différence des antécédens est à la différence des conséquens, comme un antécédent est à son conséquent.*

16... Il suit encore de-là que si l'on compare ces deux propositions,

$$\begin{Bmatrix} 9 + 3 : 9 :: 21 + 7 : 21 \\ 9 - 3 : 9 :: 21 - 7 : 21 \end{Bmatrix}$$

puisque leurs conséquens sont égaux entr'eux, on en conclura cette troisième, $9 + 3 : 9 - 3 ::$

$21 + 7 : 21 - 7$, c'eſt-à-dire, *la ſomme des deux premiers termes de toute proportion eſt à leur différence, comme la ſomme des deux dernières eſt auſſi à leur différence.*

17... 3°. Si l'on a deux proportions, & qu'on multiplie, ou qu'on diviſe par ordre les termes de la première par les termes de la ſeconde, les produits ou quotients qui en réſulteront, ſeront encore en proportion.

Soient donc les deux proportions $9 : 3 :: 21 : 7$ & $6 : 4 :: 12 : 8$, on aura

Par multiplication, $9 \times 6 : 3 \times 4 :: 21 \times 12 : 7 \times 8$,

Par diviſion, $\frac{9}{6} : \frac{3}{4} :: \frac{21}{12} : \frac{7}{8}$

Ce que nous venons de dire de deux proportions doit s'entendre également d'un plus grand nombre.

18... Donc ſi quatre quantités ſont en proportion, on peut conclure que leurs quarrés, leurs cubes, & en général leurs puiſſances ſemblables, ſeront auſſi en proportion.

Il eſt donc évident qu'on peut faire ſubir une infinité de changemens différens aux quatre termes d'une proportion géométrique, par la voix des permutations, par celle de l'addition, de la ſouſtraction, de la multiplication & de la diviſion, &c., ſans que ces termes ceſſent d'être en proportion, pourvu qu'on ait ſoin de faire les mêmes opérations ſur chacun de ſes rapports.

Ce que nous venons de dire des nombres, doit s'entendre également des lignes que nous

devons considérer dans la Géométrie, comme les termes de l'étendue.

Des Progressions Arithmétiques & Géométriques.

19... On appelle *Progression* en général, une suite de rapports égaux, disposés de manière que le conséquent du premier rapport serve d'antécédent au second, que le conséquent du second serve d'antécédent au troisième; le conséquent du troisième, d'antécédent au quatrième, & ainsi de suite.

20... La progression est arithmétique, si la nature des rapports qu'on y considère est arithmétique, c'est-à-dire, si chaque terme surpasse celui qui le précède, ou en est surpassé de la même quantité. Telle est, par exemple, cette suite de termes, ÷ 2 . 4 . 6 . 8 . 10 . 12 . 14 . 16 . 18 . 20 . &c.

Ou bien celle-ci, ÷ 20 . 18 . 16 . 14 . 12 . 10 . 8 . 6 . 4 . 2.

21... La progression est géométrique, si elle est composée de rapports géométriques, ou si, dans cette suite, chaque terme contient celui qui le précède, ou est contenu en lui le même nombre de fois. Ainsi ∺ 3 : 6 : 12 : 24 : 48 : 96 :, &c. ou ∺ 96 : 48 : 24 : 12 : 6 : 3 : est une progression géométrique.

Les points divisés par une barre qu'on voit à la tête des progressions arithmétiques & géométriques, ont la même signification que ceux qu'on trouve devant les proportions continues.

22... La progreſſion ſoit arithmétique, ſoit géométrique, eſt dite *croiſſante* ou *décroiſſante*, ſelon que les termes vont en augmentant ou en diminuant.

23... Puiſque dans une progreſſion arithmétique chaque terme ſurpaſſe celui qui le précède, ou en eſt ſurpaſſé de la même quantité, laquelle eſt la raiſon de la progreſſion, le ſecond terme eſt donc égal au premier plus ou moins la raiſon, le troiſième eſt égal au ſecond plus ou moins la raiſon, ou eſt égal au premier plus ou moins deux fois la raiſon, le quatrième eſt égal au premier plus ou moins trois fois la raiſon, ainſi de ſuite; d'où on peut tirer cette règle générale. *Un terme quelconque d'une progreſſion arithmétique eſt égal au premier plus ou moins la raiſon répétée autant de fois qu'il y a de termes avant lui.* Je dis plus ou moins, parce que la progreſſion peut être croiſſante ou décroiſſante.

24... En faiſant les mêmes conſidérations ſur les progreſſions géométriques, on voit, d'après ce qui a été dit, que puiſque chaque terme contient celui qui le précède, ou eſt contenu en lui le même nombre de fois, qui eſt la raiſon de la progreſſion, le ſecond terme eſt donc formé du premier multiplié on diviſé par la raiſon; pareillement le troiſième eſt formé du ſecond multiplié ou diviſé par la raiſon, ou du premier multiplié ou diviſé par la raiſon élevée à la ſeconde puiſſance; le quatrième eſt auſſi formé du premier multiplié ou diviſé par la raiſon élevée à la troiſième puiſſance, ainſi de ſuite. On

peut donc en conclure cette règle générale:

Un terme quelconque d'une progression géométrique doit être formé du premier multiplié ou divisé par la raison élevée à une puissance marquée par le nombre des termes qui précèdent ce terme quelconque.

25... On se sert encore de ces règles générales, pour insérer un nombre quelconque de moyens proportionnels, soit arithmétiques, soit géométriques, entre deux nombres donnés.

Soit proposé, par exemple, d'insérer six moyens proportionnels arithmétiques entre 2 & 10, puisqu'il doit y avoir huit termes dans cette progression, le dernier, qui est 10, doit être égal au premier terme 2, plus la raison répétée sept fois : donc si l'on en retranche le premier, & qu'on divise le reste par 7, le quotient sera la raison qui doit régner dans la progression. Il sera donc facile, d'après ce qui a été dit (23), d'insérer tant de moyens proportionnels arithmétiques qu'on voudra entre deux nombres donnés.

26... Pareillement est-il question d'insérer six moyens proportionnels géométriques entre 3 & 12 ? On voit d'abord que cette progression sera composée de huit termes, dont le dernier, qui est 12, doit être formé du premier 3, multiplié par la raison élevée à la septième puissance. Donc si je divise le huitième terme par le premier, & si du quotient qui en résultera, j'extrais la racine septième, cette racine sera la raison de la progression. Connoissant la raison qui doit régner

entre tous ces termes, il sera facile d'insérer le nombre des moyens proportionnels demandés (24).

27... En comparant ces deux règles générales; & considérant en même temps que tout ce qui se fait par addition & soustraction dans les progressions arithmétiques, se fait par multiplication ou par division dans les progressions géométriques, & que tout ce qui se fait par multiplication & par division dans les premières, se fait par formation de puissances & par extraction de racines dans la seconde, on verra quel est le principe qui a servi de fondement à la découverte des logarithmes, par le moyen desquels on est parvenu à abréger considérablement toutes les opérations de l'Arithmétique, comme nous allons le voir.

Des Logarithmes.

28... Les *Logarithmes* sont des nombres artificiels, dont on se sert pour abréger le calcul dans toutes les parties des Mathématiques. Ces nombres sont disposés en progression arithmétique, & répondent, terme pour terme, à la suite des nombres naturels, qui sont en progression géométrique. Il y a, entre ces deux espèces de progressions, la même correspondance qu'entre les proportions arithmétiques & géométriques. Cette correspondance est telle, que la première de ces progressions emploie, comme nous venons de le voir, l'addition & la soustraction, la multiplication & la division, dans les mêmes

circonſtances, où la ſeconde emploie la multiplication & la diviſion, la formation des puiſſances & l'extraction des racines. Frappé de cette analogie ; le fameux *Neper*, baron Ecoſſois, imagina le premier de ſubſtituer les logarithmes aux nombres naturels, & de réduire, par ce moyen, les principales opérations de l'arithmétique à de ſimples additions & ſouſtractions ; idée très-ingénieuſe, qui, en abrégeant le calcul, a rendu des ſervices immortels à toutes les ſciences mathématiques, & particulièrement à l'aſtronomie & à la navigation.

29... Dans cette vue on a donc pris & combiné enſemble deux progreſſions, l'une géométrique & l'autre arithmétique. Suppoſons, par exemple, qu'on ait pris les deux progreſſions ſuivantes :

$$\div\!\!\div 1 : 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : 128 : 256 : , \&c.$$
$$\div\, 0 . 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . 8 ., \&c.$$

Il ſuit de la nature & de la correſpondance de ces deux progreſſions, que ſi l'on multiplie ou ſi l'on diviſe l'un par l'autre, deux termes de la première ſuite, & ſi l'on ajoute en même tems, ou ſi l'on ſouſtrait les deux termes correſpondans de la ſuite inférieure, le produit & la ſomme, le quotient & la différence ſeront deux termes qui ſe correſpondront dans ces deux progreſſions. Par exemple, ſi je multiplie 16 par 4 de la première ſuite, & ſi j'ajoute en même tems leurs termes correſpondans 4 & 2 de la ſuite inférieure, la ſomme 6 de ces deux derniers répondra exacte-

ment au produit 4 des deux premiers. Si au lieu de multiplier, je divise 16 par 4, & si je soustrais 3 de 4, la différence 2 de ceux-ci répondra au quotient 4 de ceux-là.

30... Chaque terme de la progression arithmétique est donc le logarithme du terme correspondant dans la progression géométrique. Mais comme il y a une infinité de progressions géométriques, dont chacune peut être combinée avec une infinité d'autres progressions arithmétiques, le choix de ces progressions est donc absolument arbitraire: cela est vrai. Cependant, pour la construction des tables ordinaires des logarithmes, on a préféré la progression géométrique décuple, parce qu'elle sert de fondement à notre numération; & pour représenter les logarithmes, on a pris la progression arithmétique des nombres naturels, parce qu'elle est la plus simple, & qu'il y a un grand avantage à avoir zero pour premier terme de cette progression; c'est-à-dire, que la base du systême des logarithmes dont nous ferons usage, est établie sur la combinaison de ces deux progressions :

$$\div\!\!\div\; 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 : 10000 :, \&c.$$
$$\div\; 0 .\; 1 .\; 2 .\; 3 .\; 4 .\; 5 ., \&c.$$

31... A la seule inspection de ces deux progressions, on voit quel est le logarithme de chaque nombre compris dans la progression géométrique; mais entre 1 & 10, entre 10 & 100, entre 100 & 1000, &c. de cette même progression, il y a des termes intermédiaires, dont

chacun doit avoir aussi son logarithme correspondant. Pour cela imaginons qu'entre tous ces termes on ait inséré un très-grand nombre de moyens proportionnels géométriques, pareil nombre entre tous les termes correspondans de la progression arithmétique, & qu'on n'ait pris dans la première, parmi ces moyens proportionnels, que ceux qui exprimoient la suite des nombres 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, & dans la seconde les termes correspondans à ces nombres naturels, on aura à-peu-près une idée de la formation des logarithmes intermédiaires, & de leur disposition dans les tables; je dis à-peu-près, parce que c'est ainsi qu'on pourroit s'y prendre en effet, si l'on n'avoit pas aujourd'hui des moyens plus expéditifs par le secours de l'algèbre & du calcul intégral. Quoi qu'il en soit, c'est à cela que revient le calcul des logarithmes.

32... Il suit de là que tous les nombres entiers, compris entre 1 & 10, auront des logarithmes plus grands que zero, & moindres que l'unité. Ces logarithmes ne peuvent donc être que des nombres fractionnaires. Pareillement, tous les nombres compris entre 10 & 100, auront des logarithmes plus grands que l'unité, & moindres que 2, c'est-à-dire, l'unité accompagnée d'une fraction décimale. Les nombres compris entre 100 & 1000, auront pour logarithmes deux unités & une fraction décimale; & ainsi des autres logarithmes des nombres.

C'est-à-dire, que le premier chiffre de chaque logarithme doit être composé d'autant d'unités moins

moins une qu'il y a de chiffres dans le nombre naturel auquel il appartient. Ce premier chiffre, qu'on appelle la *caractéristique* du logarithme, est toujours séparée de la fraction décimale par une virgule ou un point. Il est donc facile de juger par la caractéristique dans quelle décade, ou dans quel rang de chiffres se trouve le nombre naturel auquel il appartient, & même suppléer cette caractéristique, lorsqu'elle ne se trouve point dans les tables, comme dans les nouvelles tables de *Gardiner*.

Comme nous ne considérons ici les logarithmes que par rapport à l'usage qu'on peut en faire dans les calculs numériques, nous n'entrerons pas dans un plus grand détail sur leur construction. Il nous suffit de savoir que ce travail a été consommé par les soins d'habiles Géomètres, qui y ont consacré leurs veilles : il ne s'agit plus maintenant que d'en savoir faire usage.

I.

33... Soit proposé, par exemple, de multiplier 143 par 38 : on prend dans les tables le logarithme du multiplicande & celui du multiplicateur, on les ajoute ensemble, & leur somme est un nouveau logarithme qui répond au produit.

Opération.

Logarithme de 143	2,1553360
Logarithme de 38	1,5797836
Somme, ...	3,7351196

Ce logarithme répond dans les tables à 5434 ; produit de 143×38.

34... La raiſon de cette opération eſt fondée ſur ce principe, que, dans toute multiplication, *l'unité eſt au multiplicateur*, *comme le multiplicande eſt au produit* ; par conſéquent, les logarithmes qui répondent à ces quatre termes, ſont en proportion arithmétique. Ainſi *la ſomme des moyens eſt égale à celle des extrêmes.* Or le logarithme de l'unité, qui eſt le premier terme, eſt zero ; donc la ſomme des moyens, c'eſt-à-dire, celle des logarithmes des deux facteurs, eſt égale au dernier extrême, qui eſt le logarithme du produit.

II.

35... Veut-on, par exemple, diviſer 9800 par 35 ? Après avoir trouvé dans les tables le logarithme du dividende & celui du diviſeur, on retranchera celui-ci du premier, & la différence ſera le logarithme du quotient.

Opération.

Logarithme de 9800 . .	3, 9912261
Logarithme de . . 35 . .	1, 5449680
	2, 4471581

Ce logarithme répond dans les tables à 280 ; quotient de 9800, diviſé par 35.

36... La raiſon de cete opération eſt facile à ſentir. Dans toute diviſion on a, *le dividende eſt au diviſeur*, *comme le quotient eſt à l'unité* ;

par conséquent, les logarithmes de ces quatre termes sont en proportion arithmétique : donc, puisque le logarithme de l'unité est zero, si l'on retranche le logarithme du diviseur de celui du dividende, le reste sera évidemment le logarithme du quotient. Voilà l'avantage d'avoir zero pour logarithme de l'unité.

37... En réfléchissant sur la nature de ces deux opérations, on voit, 1°. que puisque le logarithme du produit est toujours égal à la somme des logarithmes de ses facteurs, si l'on ajoute 1, 2, 3 ou 4 unités à la caractéristique du logarithme d'un nombre, on aura le logarithme de ce nombre multiplié par 10, par 100, par 1000 ou par 10000 ; car ces quatre facteurs ont pour logarithmes les nombres 1, 2, 3, 4. Donc si j'ajoute une unité de plus à la caractéristique 3 du logarithme du produit 5434, trouvé ci-dessus, ce logarithme, avec cette augmentation, répondra dans les tables à 54340, qui est dix fois plus fort que 5434.

38... 2°. Si au contraire on retranche 1, 2, 3 ou 4 unités de la caractéristique d'un logarithme, le nombre naturel auquel il répondra alors, sera 10 ou 100 ou 1000 ou 10000 fois plus petit que celui auquel il répondoit auparavant. Par exemple, si je retranche une unité de la caractéristique du logarithme du quotient 280, ce logarithme, ainsi diminué, répondra à 28, qui est dix fois plus petit que 280.

39... Donc en suivant le même raisonnement, on voit que, pour élever un nombre au quarré,

au cube, ou à une puiſſance quelconque, il faut multiplier le logarithme de ce nombre par 2, par 3, ou en général par l'expoſant de la puiſſance à laquelle on veut l'élever; & réciproquement, pour avoir la racine quarrée, cubique, ou celle d'une puiſſance quelconque, il faut diviſer le logarithme du nombre élevé à cette puiſſance par 2, par 3, ou en général par l'expoſant de la puiſſance dont on ſe propoſe d'extraire la racine.

40... Pour achever de ſe convaincre de la juſteſſe de ces opérations, prenons pour exemple le nombre 6, & formons cette proportion géométrique, $1 : 6 :: 6 : 36$, les logarithmes de ces quatre termes ſeront en proportion arithmétique: donc puiſque *la ſomme des extrêmes de cette dernière eſt égale à la ſomme des moyens*, on aura log. 1 + log. 36 = log. 6 + log. 6 = 2 log. 6. Or le logarithme de l'unité étant zero, on a log. 36 = 2 log. 6, ou log. 6 = log. $\frac{36}{2}$: donc en général le logarithme d'un nombre n'eſt que la moitié du logarithme de ſon quarré. On peut raiſonner de même pour les autres puiſſances.

41... Puiſque toute multiplication par logarithmes eſt changée en addition, & toute diviſion en ſouſtraction, pour trouver le quatrième terme d'une proportion, il faut donc ajouter les logarithmes du ſecond & du troiſième terme, & retrancher de cette ſomme le logarithme du premier; le reſte ſera le logarithme du quatrième terme cherché.

Exemple.

42... Soit proposé de trouver le quatrième terme de cette proportion ou règle de trois....

toises toises
. . . . 21 : 7 : : 401 liv. : *x*

Opération.

Logarithme de 7	0, 8450980
Logarithme de 401	2, 6031444
Somme	3, 4482424
Moins le logarithme de 21 —	1, 3222193
Différence ou reste	2, 1260231

qui répond à 133 & une fraction.

J'ajoute le logarithme de 7 à celui de 401, & de leur somme je retranche le logarithme de 21; la différence qui en résulte est un nouveau logarithme qui répond dans les tables entre le logarithme de 133 & celui de 134. Ce quatrième terme est donc 133 en nombres entiers, plus une fraction. Pour exprimer cette fraction en décimales, à moins d'un dixième près, il faut chercher ce dernier logarithme avec une unité de plus à sa caractéristique. Avec cette augmentation, on trouve dans les tables qu'il répond à 1336, à peu de chose près. Mais comme on a augmenté sa caractéristique d'une unité, le nombre qui lui répond doit être dix fois plus fort qu'il n'étoit. Pour le ramener à sa

juste valeur, il faut donc en retrancher le dernier chiffre sur la droite. Ce dernier chiffre exprimera en décimales des dixièmes d'unité ; en sorte que ce quatrième terme sera 133, 6, c'est-à-dire, 133, & six dixièmes.

43.. On voit donc que les fractions n'ont pas leurs logarithmes dans les tables : on peut en dire autant des entiers joints aux fractions ; & il en est de même des racines, des nombres, qui ne sont pas des puissances parfaites du degré de ces racines.

Voilà en abrégé les principaux usages des logarithmes pour le calcul des nombres naturels. Ces mêmes usages s'étendent encore au calcul des triangles rectilignes & sphériques ; mais ce n'est pas ici le lieu d'en parler.

ÉLÉMENS DE GÉOMÉTRIE.

44... La *Géométrie*, qui a pour objet la mesure de l'étendue, considère trois sortes de dimensions, *longueur*, *largeur* & *profondeur* ou *épaisseur*. C'est par ces grandeurs qu'on peut juger de l'espace que les corps occupent, ou connoître le rapport de leur volume à un autre volume connu & pris pour unité de mesure. Quoique ces trois dimensions soient toujours unies ensemble, & constituent ce qu'on nomme en général *corps* ou *solide*, on peut néanmoins les séparer par la pensée : c'est ainsi que lorsqu'on veut connoître la profondeur d'une rivière, d'un canal, d'une rade, &c., on ne fait pas attention

à sa longueur, ni à sa largeur. Pareillement, quand on veut juger de la surface d'une mer particulière, d'un lac, d'une île, &c., on ne considère que sa longueur & sa largeur prises ensemble. Mais lorsqu'on veut savoir quelle est la capacité d'un corps, le volume d'un vaisseau, par exemple, il faut alors considérer sa longueur, sa largeur, sa profondeur prises ensemble. FIG.

45... Il y a donc trois sortes d'étendue.

L'étendue en longeur seulement, qu'on appelle *ligne;* l'étendue en longueur & largeur, qu'on nomme *surface;* & l'étendue en longueur, largeur & profondeur, qu'on nomme *corps* ou *solide.*

Comme nous ne devons emprunter de la Géométrie que ce qui conduit à la démonstration & à l'intelligence des principes de l'Hydrographie, nous ne traiterons ici que des lignes & des surfaces; nous nous bornerons même aux théorêmes qui tendent directement à l'objet que nous nous sommes proposé.

Des Lignes.

45... Les extrémités d'une ligne se nomment des *points.* On appelle aussi de ce nom, les endroits où une ligne est coupée, & même celui où deux lignes se rencontrent.

46... Une ligne droite est celle qui va directement, & par le plus court chemin, d'un point à un autre, telle est la ligne AB, (*fig.* 1[re].).

47... La ligne courbe est celle qui va d'un 1

FIG. point à un autre, en faisant quelque détours ; comme la ligne CD, (*fig.* 2e.).

2 On voit donc que deux points suffisent pour déterminer une ligne droite, au lieu qu'il en faut plus de deux pour déterminer une ligne courbe.

48... On nomme *Parallèles*, des lignes droites, qui, tracées sur un même plan, sont à égale distance dans toute leur étendue ; telles sont les lignes AB, CD, (*fig.* 3e.).

3 49... Une ligne qui, en tombant sur une autre, ne penche ni à droite, ni à gauche, est une ligne *perpendiculaire*. Ainsi la ligne AD est perpendiculaire sur BC, parce qu'elle ne penche ni vers B, ni vers C, & celle-ci est réciproque-
4 ment perpendiculaire sur AD.

50... La ligne *oblique* est celle qui, en tombant sur une autre, s'incline plus d'un côté que de l'autre ; telle est, par exemple, GH, (*fig.* 5e.).
5 Cette ligne est oblique à EF, parce qu'elle est plus inclinée vers le point E, que vers le point F. La ligne EF est, par la même raison, oblique à GH.

Une ligne droite, considérée par rapport à une autre ligne droite, peut donc avoir trois positions différentes, être *parallèle*, *perpendiculaire* ou *oblique*.

51... Les lignes droites ou courbes se mesurent par une ligne droite, que l'on considère alors comme unité de mesure. Comme cette unité est absolument arbitraire, il y a plusieurs mesures différentes en fait de lignes. Indépendamment de la toise & de ses parties auxquelles

toutes les autres mesures se rapportent, on distin- FIG.
gue encore la *brasse*, la *lieue*, le *mille*, &c.

La brasse dans la Marine a cinq pieds; on s'en sert pour compter les longueurs des cordages, & les profondeurs qu'on mesure à la sonde.

La lieue marine en France est de 2851 toises, c'est-à-dire, la vingtième partie de la longueur d'un degré terrestre, qui vaut 57030 toises à très-peu près.

Le mille d'Angleterre & d'Italie, qui est aussi une mesure itinéraire, & dont on fait un fréquent usage dans les calculs du pilotage, ne vaut que le tiers de notre lieue marine, c'est-à-dire, 950 toises.

52. De toutes les lignes courbes, nous ne considérerons dans ces élémens, que la *circonférence* du cercle. On appelle ainsi une ligne courbe, telle que ABDFGE, (*fig.* 6e.), dont tous
les points sont également éloignés d'un autre 6
point dans le milieu, qu'on nomme *centre*. Les lignes droites & égales CD, CB, CA, &c. qui vont du centre à la circonférence, se nomment *rayons*. Les lignes comme GD, FB, qui, passant par le centre, se terminent de part & d'autre à la circonférence, se nomment *diamètres*. Tous les diamètres sont égaux, puisqu'ils sont composés chacun de deux rayons, & qu'ils partagent la circonférence en deux parties égales.

Les portions telles que AE, EG, GF, &c. de la circonférence, s'appellent des *arcs* de cercle, & le cercle lui même n'est autre chose que la surface plane renfermée par la circonférence ABDFGE.

Une ligne droite, comme GE ou GF, qui va de l'extrémité d'un arc à l'autre extrémité, s'appelle la *corde* de cet arc.

Puisque la courbure du cercle est par-tout uniforme, il est aisé de voir que les cordes égales d'un même cercle, ou de cercles égaux, soutendent des arcs égaux, & réciproquement.

53... Les Géomètres, afin de déterminer avec plus de précision la mesure des angles, sont convenus de partager toute circonférence de cercle, grande ou petite, en 360 parties égales, qu'on nomme *degrés*; chaque degré en 60 *minutes*, chaque minute en 60 *secondes*, chaque seconde en 60 *tierces*, &c.; en sorte que les arcs semblables AB (*ab*), compris entre les mêmes rayons, quoique de différente grandeur, ont cependant le même nombre de degrés, & par conséquent la même valeur.

On marque les degrés par un petit zéro .. = o
Les minutes par un petit trait . . . . . = '
Les secondes par deux petits traits . . . = ''
Les tierces par trois . . . . = '''

Ainsi pour marquer un arc de cercle de la valeur de 8 degrés, 14 minutes, 50 secondes, 36 tierces, on l'écrit ainsi, $8^{o}. 14'. 50''. 36'''$.

Quoique cette division de la circonférence soit admise généralement, cela n'empêche pas que, pour plus de commodité dans la pratique, on n'ait introduit, dans quelques parties des Mathématiques, des usages particuliers de compter les degrés & parties de degré.

Les Astronomes, par exemple, comptent les degrés par trentaine, qu'ils appellent *signes*, c'est-à-dire, qu'ayant à compter 69°. 53'. 30''., ils diront 2 signes, 9°. 53'. 30''., ou 2s. 9°. 53'. 30''. FIG.

Les Marins, pour les usages de la boussole, partagent la circonférence en 32 parties égales, qu'ils nomment *airs*, ou *rumbs du vent*. Chacune de ces parties est donc la trente-deuxième partie de 360, c'est à-dire, qu'elle vaut 11°. 15'. Ainsi au lieu de 24°. 45'., ils disent deux rumbs de vent, plus 2°. 15'. Pareillement, au lieu de 45°., ils disent 4 rumbs de vent, parce que 4 fois 11°. 15'., font 45°.

Des Angles & de leur mesure.

54... L'ouverture que forment deux lignes AB, AC, (*fig.* 7e.), qui se touchent ou se coupent en un point, s'appelle un *angle*. Le point de rencontre A est le sommet ou la pointe de l'angle, & les deux lignes AB, AC, en sont les côtés. 7.

On désigne quelquefois l'angle par une seule lettre; mais quand on en emploie trois, c'est toujours celle du milieu qui marque le sommet. Ainsi l'angle formé par les lignes AB, AC, doit être toujours désigné par A simplement, ou par BAC.

Tout angle formé par deux lignes droites, comme BAC, se nomme angle *rectiligne*; & on appelle angle *sphérique*, celui qui est formé

FIG. sur une sphère par la rencontre de deux arcs de grand cercle, tel est MAN, (*fig.* 8e.)

8 55... La grandeur d'un angle ne dépend pas de la longueur de ses côtés, mais du nombre de degrés de l'arc grand ou petit, compris entre ses côtés. La grandeur de l'angle BAC, par exemple, est toute la quantité dont la ligne AB s'est éloignée de AC, en tournant sur le point A. Cette quantité peut-être représentée indifféremment par l'arc BC, ou par l'arc (*bd*) : ces deux arcs ont nécessairement le même nombre de degrés, puisqu'ils ont été décrits en même tems par deux points différens de la ligne AB, en s'éloignant de AC.

Un angle quelconque a donc pour mesure le nombre de degrés & parties de degré de l'arc grand ou petit, compris entre ses côtés, & décrit de son sommet comme centre.

Donc pour faire au point (*a*) de la ligne (*ac*) (*fig.* 7e.), un angle égal à l'angle BAC, il faut, avec une ouverture de compas arbitraire, & du point (*a*) comme centre, décrire un arc indéfini qui touche la ligne (*ac*) en un point quelconque (*c*). Portant ensuite la pointe du compas sur le sommet A de l'angle donné, on décrira, avec la même ouverture, l'arc BC. Ayant pris avec le compas la longueur de cet arc, on la portera de (*c*) en (*b*); par ce dernier point, & par le point (*a*), on tirera la ligne (*ab*), & on aura l'angle (*bac*) égal à l'angle BAC.

Pour mesurer les angles, on peut se servir d'un cercle divisé en 360°.; mais il est plus

commode de se servir d'un rapporteur, qui est un demi-cercle de cuivre ou de corne divisé en 180°. Pour cet effet on applique le centre de cet instrument sur le sommet de l'angle; & l'ayant couché sur le plan de la figure, il ne reste plus qu'à voir combien il y a de degrés compris entre les deux côtés de l'angle. Cet instrument sert non seulement à mesurer les angles, mais à en former sur le papier qui aient précisément un nombre déterminé de degrés.

Au lieu de cet instrument, on peut encore faire usage de la ligne ou échelle des cordes du compas de proportion. Pour mesurer avec cette échelle l'angle BAC, il n'y a qu'à décrire du sommet de l'angle un arc BC, dont le rayon AB soit égal à la corde de 60°. prise sur l'échelle, parce que cette corde indique la longueur du rayon du cercle qui a servi à la construction de l'échelle. L'arc BC étant décrit, on portera sa corde sur l'échelle, & le nombre de degrés indiqués sera la mesure de l'angle cherché.

On se sert de l'échelle des cordes pour résoudre divers problêmes de navigation, par des opérations graphiques.

56... Les angles prennent différens noms, à raison de l'ouverture plus ou moins grande de leurs côtés : on en distingue de trois sortes, l'*angle droit*, l'*angle aigu* & l'*angle obtus*.

57... L'angle ACD (*fig.* 6e.) est droit, lorsque l'un de ses côtés AC ne penche ni vers l'autre côté CD, ni vers son prolongement CD; alors les deux lignes AC, CD, qui concourent à le

FIG. former, font perpendiculaires l'une à l'autre, & embraſſent, par leur ouverture, un arc de 90°. ,
6 ou le $\frac{1}{4}$ de la circonférence.

58... L'angle aigu eſt celui qui eſt formé par deux lignes inclinées l'une à l'autre, & dont l'inclinaiſon ou l'ouverture eſt meſurée par un arc de cercle au deſſous de 90°. Ainſi l'angle ACB eſt aigu, parce qu'il comprend, entre ſes côtés, un arc AB moindre que 90°.

59... Enfin un angle tel que DCE eſt obtus, lorſque ſes côtés, inclinés l'un à l'autre, comprennent un arc DE plus grand que 90°.

60... On voit, par ce qui vient d'être dit, que l'angle droit a toujours pour meſure 90°. C'eſt le ſeul dont la grandeur ſoit déterminée & conſtante. L'angle aigu & l'angle obtus peuvent être plus petits ou plus grands, puiſqu'ils n'ont que des limites, & non une valeur déterminée.

61... On appelle *complément* d'un angle ou d'un arc, ce qu'il faut ajouter à cet angle ou à cet arc, pour faire 90°. Ainſi l'angle ACF a pour complément BCF.

62... Les angles aigus, qui auront des complémens égaux, ſeront donc égaux, & réciproquement : il en ſera de même des angles obtus.

63... On appelle *ſupplément* d'un angle ou d'un arc, ce qu'il faut ajouter à cet angle ou à cet arc, pour faire 180°. Ainſi l'angle ACF a pour ſupplément l'angle DCF. Les angles égaux auront donc des ſupplémens égaux, & ceux qui auront des ſupplémens égaux, ſeront donc égaux.

FIG.

Théorême premier.

64... De là on peut conclure *que les angles* 9
BAC, DAE, *opposés au sommet, & formés par l'interfection de deux lignes droites, sont égaux.*

Car si l'on regarde le point A comme le centre du cercle, & la ligne BD comme un diamètre; les deux angles de suite BAC, DAC, vaudront 180°., puisqu'ils embrassent une demi-circonférence de cercle: donc BAC a pour supplément AD; mais DAE a aussi le même angle pour supplément, puisqu'en faisant le même raisonnement, on peut prendre aussi la ligne CE pour diamètre: donc les deux angles BAC, DAE, opposés au sommet sont égaux.

Propriétés des Parallèles.

65... Nous avons déja dit (48) que deux lignes tracées sur un même plan, sont dites *parallèles*, lorsqu'elles sont à égale distance dans tous les points de leur étendue; de sorte que, prolongées à l'infini, elles ne se rencontreroient jamais. Mais il est bon de les comparer ici à une troisième ligne, & d'examiner les propriétés qui en résultent.

Deux lignes AB, DE (*fig.* 10e.), tracées sur 10
un même plan, & coupées par une troisième ligne FL, qu'on nomme *secante*, forment huit angles avec cette secante; savoir, 4 autour du point C, & 4 autour du point G. Les angles compris entre les deux parallèles, sont nommés

angles *internes* ; & ceux qui ſont au-dehors ; angles *externes*. Parmi les angles internes, ceux qui ſont ſitués de part & d'autre de la ſecante, comme AGC & GCE, ou BGC & DCG, s'appellent angles *alternes-internes* ; & parmi les externes, ceux qui ſont ſitués de part & d'autre de la ſecante, comme DCF & BGL, ou ECF & AGL, s'appellent angles *alternes-externes*.

66... D'après ces notions, il eſt aiſé d'établir les trois propriétés ſuivantes.

Théorême II.

1°. *Que les angles tels que* BGL, GCE, *formés du même côté de la ſecante, & ſitués dans le même ſens, ſont toujours égaux* ; car les lignes AB, DE, étant parallèles, doivent être également inclinées, chacune à l'égard de toute autre ligne, comme FL : donc les angles formés du même côté de la ſecante ſont égaux.

2°. *Que les angles alternes-internes* AGC, GCE, *ſont égaux* ; car AGC eſt égal à BGL, qui lui eſt oppoſé au ſommet : or ce dernier eſt égal à GCE ; donc AGC=GCE. On peut en dire autant des angles alternes-externes.

3°. *Que les angles internes, tels que* AGC, DCG, *ſitués d'un même côté, ſont ſupplément l'un de l'autre* ; car AGC eſt ſupplément de AGL, mais celui-ci eſt égal à DCG : donc AGC & DCG ſont ſupplément l'un de l'autre. On démontrera la même choſe pour les angles externes ſitués du même côté.

Chacune de ces propriétés peut fournir une manière

manière de mener une parallèle à une ligne donnée. FIG.

PROBLÊME.

67... *Soit proposé de mener, par un point donné* C, *une parallèle à la ligne* AB, (*fig.* 11e.). 11

Menez, par le point C, la ligne indéfinie CD, qui coupe la ligne donnée en un point quelconque E; puis de ce point E, comme centre, & d'un rayon égal à CE, décrivez l'arc de cercle CG. Pareillement du point C, comme centre, & avec la même ouverture de compas, décrivez indéfiniment un autre arc de cercle; portez la grandeur du premier ſur le ſecond, de E en F; & enſuite, par le point C & le point F, faites paſſer une ligne droite, elle ſera la parallèle demandée.

PROBLÊME.

68... On peut encore réſoudre ce problême comme il ſuit.

Du point donné C (*fig.* 12e.), décrivez un arc de cercle qui touche la ligne AB ſans la couper, d'un autre point E, pris à volonté ſur la ligne donnée AB; tracez, avec la même ouverture de compas, un autre arc de cercle; tirez enſuite la droite CF, de manière qu'elle paſſe par le point C, & qu'elle touche le dernier arc de cercle au point F; cette ligne ſera parallèle à la ligne donnée AB. 12

Cette manière eſt la plus commode & la plus facile.

Les propriétés des parallèles sont d'un fréquent usage dans toutes les parties des Mathématiques ; on s'en sert pour démontrer un très-grand nombre de propositions, & pour résoudre plusieurs problêmes utiles, soit de Géométrie, soit d'Astronomie nautique. On les emploie beaucoup dans le pilotage, sur-tout pour marquer sur les cartes marines la route qu'a tenue un vaisseau pendant sa navigation ; ce qu'on appelle *pointer la carte* ou *faire le point.*

69... Les angles considérés au centre du cercle, comme nous l'avons fait jusqu'ici, ont toujours pour mesure l'arc de cercle compris entre leurs côtés; mais lorsque leur sommet est ailleurs qu'au centre, ils n'ont alors pour mesure qu'une portion de circonférence, d'autant plus petite, qu'ils sont plus éloignés du centre : c'est cette portion qu'il faut savoir déterminer dans plusieurs circonstances. Nous nous bornerons à faire voir que tout angle qui a son sommet à la circonférence, & qui est formé par deux cordes ou par une tangente & une corde, a toujours pour mesure la moitié de l'arc compris entre ses côtés.

Théorême III.

70... *Un angle* MAN, *formé par deux cordes, & dont le sommet est à la circonférence, a toujours pour mesure la moitié de l'arc* MN, *compris entre ses côtés.*

Cette proposition comprend trois cas différens, où l'un des côtés passe par le centre du

cercle (*fig.* 13e.), ou le centre eſt entre les deux côtés (*fig.* 14e.), ou bien le centre eſt hors des côtés (*fig.* 15e.). 13 14 15

Dans le premier cas, ayant mené le diamètre BD parallèle au côté AM, on voit que l'angle MAN=DCN; donc ils ont même meſure; mais l'angle au centre DCN a pour meſure l'arc DN=AB=MD, à cauſe des parallèles. Donc l'angle MAN a pour meſure DN ou MD, moitié de l'arc MN, compris entre ſes côtés.

Second cas. Si le centre eſt entre les côtés de l'angle MAN (*fig.* 14e.) du ſommet de l'angle A, menez le diamètre AD; chacun des angles partiels MAD, DAN, aura pour meſure la moitié de l'arc compris entre ſes côtés, comme nous venons de le prouver: donc l'angle total MAN aura pour meſure la moitié de la ſomme de ces deux arcs; c'eſt-à-dire, la moitié de l'arc MN compris entre ſes côtés.

Troiſième cas. Si le centre eſt hors des côtés, comme dans la *fig.* 15e., & qu'on mène le diamètre AD, on aura MAN=DAN—DAM; donc l'angle MAN aura pour meſure $\frac{1}{2}$ DN—$\frac{1}{2}$ DM; c'eſt-à-dire, la moitié de l'arc MN compris entre ſes côtés.

Théorême IV.

71... *Un angle* BAN (*fig.* 15e.), *formé à la circonférence par une tangente & une corde, a pour meſure la moitié de l'arc* AN *compris entre ſes côtés.*

Car ayant mené GN parallèle à AB, l'on aura, en vertu de cette conſtruction, l'arc AN égal

FIG. à l'arc AG, & l'angle BAN égal à ſon alterne ANG; donc ces deux angles auront même meſure. Mais l'angle ANG a pour meſure la moitié de AG; donc l'angle BAN, formé par une corde & une tangente, aura auſſi pour meſure la moitié de l'arc AN compris entre ſes côtés.

72... Donc tous les angles qui ayant leur ſommet à la circonférence, ſont appuyés ſur le même arc, ou ſur deux arcs égaux, ſont néceſſairement égaux, puiſqu'ils ont tous pour meſure la moitié de l'arc compris entre leurs côtés.

Par conſéquent un angle qui a ſon ſommet à la circonférence, & qui eſt appuyé ſur les extrémités d'un diamètre, eſt un angle droit, puiſqu'il a pour meſure la moitié de la demi-circonférence compriſe entre ſes côtés, laquelle eſt égale à un arc de 90°.

On peut ſe ſervir de cette dernière propriété pour réſoudre le problême ſuivant.

PROBLÊME.

73... *Elever une perpendiculaire à l'extrémité* B, *de la ligne donnée* AB.

D'un point C comme centre, pris à volonté hors de la ligne donnée, & d'une ouverture de compas égale à CB, décrivez la circonférence DFBD (*fig.* 16e.), qui coupe AB en un point F;
16 par ce dernier point & le centre C, tirez le diamètre FD, & par le point D, où ce diamètre rencontre la circonférence, menez la droite DB, elle ſera la perpendiculaire cherchée; car l'angle DBF qu'elle forme à la circonférence, a ſes

côtés appuyés sur le diamètre FD : donc c'est un angle droit ; donc DB est perpendiculaire sur le point B de la ligne AB. FIG.

74... On rencontre sans cesse les angles dans toutes les parties des Mathématiques théoriques & pratiques. C'est par les angles qu'on détermine en mer la position des objets les uns à l'égard des autres, qu'on connoît la variation de la boussole, qu'on juge de la route d'un navire, qu'on distingue si celui qu'on rencontre en mer a le vent sur nous, ou si nous l'avons sur lui, & qu'on apprécie la vîtesse de sa marche. C'est en variant les angles que les voiles & le gouvernail font avec la quille du vaisseau, qu'on produit ses différentes évolutions, qu'on change sa route, qu'on accélère, ou qu'on retarde son mouvement; c'est par la mesure des angles qu'on juge des différens points de la révolution des astres, de leur lieu dans le ciel, de leurs distances respectives, & qu'on parvient enfin à déterminer le lieu de la mer où l'on est.

Problêmes dont la solution se réduit immédiatement de ce que nous venons de dire sur les lignes & les angles.

PROBLÊME PREMIER.

75... *Partager une ligne* AB *en deux parties égales par une perpendiculaire.*

Pour que cette ligne soit perpendiculaire sur le milieu de la ligne donnée AB, elle ne doit pencher ni vers A, ni vers B : il faut donc dé- 17

FIG. terminer de part & d'autre de la ligne donnée, deux points qui soient chacun à égale distance de ses deux extrémités, & le problême sera résolu.

Pour cet effet, des deux extrémités A & B comme centre, & avec une même ouverture de compas, tracez deux petits arcs qui se coupent en C & en D; par ces deux points de section, tirez la ligne CD, elle sera perpendiculaire sur le milieu de AB.

PROBLÊME II.

76... *D'un point E pris sur la ligne droite AB,*
18 (fig. 18e.) *élever une perpendiculaire à cette ligne.*

Prenez les distances EA, EB, parfaitement égales; ensuite des extrémités A & B comme centre, & avec une même ouverture de compas, tracez, au-dessus de la ligne AB, deux arcs de cercle qui se coupent en F; par ce point, & par le point donné, tirez la ligne FE, elle sera la perpendiculaire cherchée.

PROBLÊME III.

77... *D'un point donné E hors d'une ligne AB* (fig. 19e.), *abaisser une perpendiculaire sur cette*
19 *ligne.*

Du point donné E comme centre, décrivez à volonté un arc de cercle tel que ACB, qui touche la ligne donnée aux deux points A & B; de ces deux points comme centre, & avec une même ouverture de compas, décrivez deux petits arcs qui se coupent en D; ensuite par ce point, &

par le point donné E, tirez la droite ED, elle sera perpendiculaire sur AB. FIG.

Les perpendiculaires sont nécessaires dans la mesure des surfaces & dans la construction des cartes marines ; elles reviennent très-souvent dans la construction des figures, dont on fait usage pour la solution graphique de divers problêmes de navigation : enfin, on les trouve à chaque pas dans toutes les opérations de l'Architecture navale, &c.

PROBLÊME IV.

78... *Diviser un angle* BAC (fig. 7e.) *en deux parties égales.*

Il ne s'agit que de diviser l'arc qui lui sert de mesure en deux parties égales. Pour cela, des deux extrémités B & C comme centre, & avec une même ouverture de compas, tracez deux arcs qui se coupent au point E ; par ce point de section & le sommet de l'angle, faites passer une ligne droite, elle divisera l'angle donné BAC en deux parties égales.

PROBLÊME V.

79... *Diviser la circonférence de cercle* ABCD (fig. 20e.) *en 32 parties égales.* 20

Menez d'abord le diamètre AC, cette ligne partagera la circonférence en deux parties égales; divisez chacune de ces parties en deux par un second diamètre perpendiculaire au premier; divisez encore en deux les arcs AB, BC, CD, AD, divisez encore & soudivisez leurs moitiés de la

FIG. manière enſeignée ci-deſſus, juſqu'à ce que vous ſoyez arrivé à la 32e. partie, & vous aurez enfin la circonférence ABCD, diviſée en 32 parties égales, ou rumbs de vent, chacun de 11°. 15'.

80... On peut ſe ſervir de la même méthode pour faire paſſer une circonférence de cercle par trois points donnés.

Soient A, B, C, (*fig.* 21e). Ces trois points
21 donnés, ſi on les joint par deux lignes droites, AB, BC, ces deux lignes peuvent être regardées comme les cordes d'un cercle, dont le centre doit être à égale diſtance de leurs extrémités. Pour déterminer ce centre, il ne s'agit donc que de trouver un point (x), qui ſoit à égale diſtance de A, de B & de C. Pour cela on élevera une perpendiculaire ſur le milieu de la corde AB, une autre ſur le milieu de la corde BC, le point de rencontre de ces deux perpendiculaires ſera évidemment le centre demandé; car puiſque FE eſt perpendiculaire ſur le milieu de AB, tous ſes points ſont à égale diſtance des extrémités A & B. Pareillement tous les points de la perpendiculaire GH, ſur le milieu de BC, ſont à égale diſtance des extrémités B & C: donc le point (x), où concourent ces deux lignes, eſt à égale diſtance des points A, B & C; donc la circonférence décrite du point (x) comme centre & de la diſtance Ax pour rayon, paſſera néceſſairement par les trois points donnés.

Des Surfaces.

Nous allons conſidérer d'abord les propriétés

des lignes droites qui renferment un espace, FIG.
& nous commencerons par celles du triangle, comme étant la plus simple de toutes les figures rectilignes.

81... Le triangle est une figure composée de trois côtés & de trois angles. On appelle triangle *rectiligne*, celui qui est formé par trois lignes droites, comme ABC (*fig.* 22e.); & triangle *sphérique*, celui qui est formé par trois arcs de grand 22
cercle, tel que CDE (*fig.* 23e.). Nous n'examinerons les propriétés de celui-ci que dans la Trigonométrie sphérique. 23

82... On peut considérer le triangle rectiligne par rapport à ses côtés, ou par rapport à ses angles; ce qui lui fait donner des noms differens.

83... Si on le considère par rapport à ses côtés, un triangle tel que ABC (*fig.* 22e.), qui a ses trois côtés égaux, se nomme triangle *équilatéral*.

84.. Celui qui n'a que deux côtés égaux, tel que DEF (*fig.* 24e.), se nomme triangle *izocelle*. 24

85... Et celui dont les trois côtés sont inégaux, tel que GDE, s'appelle triangle *scalême* (*fig.* 25e.). 25

THÉORÊME V.

86... Une propriété bien remarquable & très-essentielle en Géométrie, *c'est que dans toute sorte de triangles rectilignes, la somme des trois angles vaut toujours* 180°.; c'est-à-dire, que si d'un même rayon ou de la même ouverture de compas, on décrit, du sommet de chaque angle du triangle DLF (*fig.* 26e.), trois arcs de cercle 26
compris entre leurs côtés respectifs, ces trois

arcs joints ensemble, vaudront une demi-circonférence de cercle, & par conséquent 180°.

Pour se convaincre de cette vérité, menez, par le sommet de l'angle L, la ligne GH, parallelement à DF; l'angle D sera égal à l'angle I, & l'angle F égal à l'angle M, à cause de la seconde propriété des parallèles coupées par une secante; mais les trois angles I, L, M, embrassent une demi-circonférence de cercle: donc les trois angles du triangle DLF, qui leur sont égaux, valent 180°.

87... D'après cette proposition, il est clair qu'un triangle rectiligne considéré par rapport à ses angles, ne peut avoir qu'un seul angle droit, & alors on l'appelle triangle *rectangle*. Le côté opposé à l'angle droit, se nomme *hypotheneuse*; tel est le triangle GHI, (*fig.* 25e.).

A plus forte raison il ne peut avoir qu'un seul angle obtus; dans ce cas, on l'appelle triangle *obtus-angle*, tel est le triangle EDF, (*fig.* 24e.).

Mais il peut avoir ses trois angles aigus, & alors on l'appelle triangle *acutangle*; tel est le triangle ABC, (*fig.* 22e.).

88... Il suit de ce que nous venons de dire, 1°. qu'aussi-tôt qu'on connoît deux angles d'un triangle, le troisième est nécessairement connu, puisqu'il est le supplément à la somme des deux autres. Si, par exemple, un des angles d'un triangle est de 60°., & l'autre de 80°., leur somme 140°., retranchée de 180°., fera connoître que le 3e. doit être de 40°.

2°. Que lorsque deux angles d'un triangle

ſont égaux à deux angles d'un autre triangle, le troiſième dans chacun eſt néceſſairement égal, puiſque les trois enſemble ne valent que 180°.

3°. Que les deux angles aigus d'un triangle rectangle ſont toujours complément l'un de l'autre; car l'angle droit étant conſtamment de 90°., il ne reſte que 90°. pour la ſomme des deux autres.

89... On peut encore remarquer comme une propriété très-utile, que le plus grand angle d'un triangle eſt oppoſé au plus grand côté, & le plus petit angle au plus petit côté; de ſorte que lorſque deux côtés ſont égaux, les deux angles oppoſés ſont auſſi égaux; & ſi les trois côtés ſont inégaux, les trois angles le feront auſſi.

De l'égalité des Triangles.

Comme il y a pluſieurs propoſitions qui ſont fondées ſur l'égalité des triangles, & que d'ailleurs le premier & le plus ſimple de tous les rapports eſt l'égalité, il eſt à propos d'établir ici les caractères auxquels on peut reconnoître l'égalité des triangles.

Théorême VI.

Premier Caractère d'égalité.

90... *Deux triangles ſont égaux, lorſqu'ils ont un angle égal compris entre deux côtés égaux.*

Si l'angle (*g*) du triangle (*gde*) eſt egal à l'angle G du triangle GDE, & qu'en outre les deux côtés (*gd*), (*ge*) du premier ſoient égaux aux

deux côtés GD, GE du second, ces deux triangles seront parfaitement égaux. Il suffit, pour s'en convaincre, d'appliquer par la pensée le premier sur le second ; alors l'angle (*c*), répondant à l'angle G, & les côtés (*gd*), (*ge*) aux deux côtés GD, GE, le point (*d*) tombera sur le point D, le point (*e*) sur le point E, & le côté (*de*) sur le côté DE; donc ces deux triangles seront parfaitement égaux.

THÉORÊME VII.

Second Caractère.

91... *Deux triangles sont égaux, lorsqu'ils ont un côté égal adjacent à deux angles égaux, chacun à chacun.*

En supposant que le côté (*de*) du premier & ses deux angles adjacens soient égaux au côté DE du second & à ses angles adjacens, si l'on applique (*de*) sur DE, le côté (*gd*) tombera exactement sur GD, à cause que l'angle (*d*) est égal à l'angle D. Pareillement, à cause que l'angle (*e*) est égal à l'angle E, le côté (*ge*) tombera sur GE; donc le point (*g*) tombera exactement sur le point G, par conséquent ces deux triangles seront parfaitement égaux.

THÉORÊME VIII.

Troisième Caractère.

92... *Deux triangles sont égaux, lorsqu'ils ont les trois côtés égaux, chacun à chacun.*

Si l'on applique le triangle (*gde*) sur le triangle GDE, les côtés du premier tomberont exactement sur les côtés correspondants du second,

& les trois angles g, d, e, ſur les trois angles G, D, E; donc les deux triangles ſe conviendront en tout ſens, & ſeront par conſéquent égaux. FIG.

La condition de l'égalité des côtés ne ſuffit pas pour rendre égales les figures qui ont plus de trois côtés, parce que les lignes, quoiqu'égales dans les deux figures, peuvent faire des angles différens, ou avoir des ſituations différentes les unes par rapport aux autres.

PROBLÊME.

93... *Conſtruire un triangle qui ſoit parfaitement égal au triangle* GDE, (*fig.* 25e.)

Il y a trois manières différentes de réſoudre ce problême, fondées ſur les trois caractères d'égalité. Nous nous ſervirons de la première comme la plus ſimple, & la moins ſujette aux erreurs inévitables dans toute opération graphique.

Tirez une ligne indéfinie FI (*fig.* 27e.), 27.
ſur l'extrémité F de cette droite; faites l'angle F égal à l'angle D; prenez enſuite FG=DG & FI=DE; des deux extrémités de ces lignes, tirez la droite GI, le triangle FGI ſera parfaitement égal au triangle GDE.

94... On appelle, du nom général de *Polygone*, toute figure compoſée de pluſieurs côtés; lorſqu'elle en a quatre, elle s'appelle *quadrilatère*; lorſqu'elle en a cinq, *pentagone*; lorſqu'elle en a ſix, *hexagone*, &c.

On diſtingue trois eſpèces de quadrilatère; le quadrilatère ſimple, le *trapeze* & le *parallelogramme*.

FIG. 95... Le *trapeze* eſt un quadrilatère qui n'a
28 que deux côtés parallèles (*fig.* 28ᵉ.).
29 96... Le *parallelogramme* eſt un quadrilatère dont les côtés oppoſés ſont parallèles entr'eux,
30 (*fig.* 30ᵉ.). Lorſque ſes quatre angles ſont droits, il s'appelle parallelogramme *rectangle*, ou ſimplement *rectangle* (*fig.* 30ᵉ.). S'il a tous ſes angles droits & tous ſes côtés égaux, il prend le nom de
31 *quarré*, (voy. *fig.* 31ᵉ.)

97... On nomme *diagonale* une ligne droite, tirée d'un angle à l'autre dans un polygone quelconque; telle eſt la ligne BD, (*fig.* 30ᵉ).

THEORÊME IX.

98... *Si dans un parallelogramme* ABCD, (*fig.* 29ᵉ. & 30ᵉ.) *on mène une diagonale d'un angle oppoſé à l'autre, cette diagonale partagera le parallelogramme en deux triangles égaux.*

Car puiſque les côtés oppoſés de cette figure ſont parallèles entr eux, les 2 angles alternes ſont égaux dans chaque triangle; par conſéquent le 3ᵉ. eſt néceſſairement égal dans chacun; donc les 2 triangles ABD, BCD ſont parfaitement égaux.

99... Puiſque la diagonale diviſe un quadrilatère en deux triangles, on peut donc conclure en général que tout polygone peut être diviſé en autant de triangles moins deux qu'il a des côtés, par des diagonales menées d'un de ſes angles aux autres.

32 100... On appelle polygone régulier, celui qui a tous ſes côtés & tous ſes angles égaux (*fig.* 32ᵉ.).

101... Il ſuit de cette définition que ſi du

centre d'un polygone régulier quelconque, on tire des lignes à tous ses angles, ces droites qui sont autant de rayons d'un cercle qu'on peut imaginer circonscrit au polygone, formeront au centre des angles égaux, puisqu'ils ont pour mesure des arcs égaux soutenus par des cordes égales. Donc pour avoir la valeur de l'angle au centre d'un polygone régulier, il faut diviser 360°. par le nombre des côtés. Par exemple, l'angle au centre de l'hexagone est la sixième partie de 360°., laquelle vaut 60°.

102... Delà on conclut que le côté de l'hexagone régulier est égal au rayon du cercle circonscrit; car en tirant les rayons CA, CB, le triangle ACB sera d'abord izocelle; par conséquent CAB=ABC. Or l'angle au centre ACB étant de 60°., chacun des deux autres sera la $\frac{1}{2}$ de 120°.=60°.; d'où on conclut que le triangle ACB sera équilatéral : donc le côté AB de l'exagone régulier est égal au rayon du cercle circonscrit.

On peut tirer de-là une manière bien simple d'élever une perpendiculaire à l'extrémité d'une ligne donnée. Nous laissons les commençans à s'exercer là-dessus.

103... On se sert encore de cette même propriété pour diviser la circonférence du cercle de 15 en 15 degrés. Pour cela on porte avec le compas la grandeur du rayon six fois sur la circonférence, ce qui la partage en six parties égales, chacune de 60°.On divise en deux chacune de ces parties, & celles-ci encore en deux de la manière

enseignée (78 & 79) & on a des arcs de 15°. Si l'on veut pousser plus loin la division, on partagera ces arcs de 15 degrés d'abord en 3, puis en cinq parties égales, & on arrivera ainsi à la division de la circonférence du cercle en 360°.

Cette dernière opération n'est pas à la vérité rigoureuse, parce qu'on n'a pas de méthode géométrique pour la division d'un arc, du moins en cinq parties égales; mais avec un peu d'adresse, on arrivera à une précision suffisante dans la pratique.

Des Lignes proportionnelles.

104... 1°. Si quatre lignes sont telles que la première soit à la seconde, comme la troisième est à la quatrième, ces lignes seront proportionnelles entr'elles.

2°. Si la première est à la seconde, comme la quatrième est à la troisième, alors les deux premières seront réciproquement proportionnelles aux deux autres.

3°. Si la première est à la seconde, comme la seconde est à la troisième, celle qui occupera la place des moyens dans la proportion, sera moyenne proportionnelle aux deux autres.

En général tout ce que nous avons dit des nombres à l'article des Raisons, Rapports & Proportions, doit s'entendre également des lignes; mais il faut observer que les rapports que nous allons considérer, ne sont que des rapports géométriques.

THÉORÊME

FIG.

THEORÊME X.

105. *Si sur le côté* AB *d'un triangle* ABC, (*fig.* 33[e].) *on prend un nombre quelconque de parties égales, telles que* DF, FH, *& qu'on tire parallelement à* BC, *les lignes* DE, FG, HI, 33
les parties EG, GI *du côté* AC, *formées par la rencontre de ces parallèles, seront aussi égales entr'elles.*

Par le point G, menez une parallèle à AB, qui rencontre HI en N & DE prolongé en M; dans les deux triangles EGM, IGN, les angles en G, opposés au sommet, seront égaux; les angles alternes en M & en N seront aussi égaux: donc les deux triangles seront parfaitement égaux; par conséquent EG=GI.

Donc il est évident que si comparant DF ou DH avec AB, on trouve que la première est le $\frac{1}{5}$ ou les $\frac{2}{5}$ de la seconde, on conclura de même que EG ou EI est le $\frac{1}{5}$ ou les $\frac{2}{5}$ de AC; c'est-à-dire, qu'on aura ces proportions: $\left\{\begin{array}{l}DF:AB::EG:AC\\DH:AB::EI:AC\end{array}\right\}$

En changeant les places des moyens, l'on aura . . . . . $\left\{\begin{array}{l}DF:EG::AB:AC\\DH:EI::AB:AC\end{array}\right\}$

Et puisque les parties correspondantes de ces divisions sont proportionnelles aux lignes totales AB, AC, elles seront donc proportionnelles entr'elles: donc DF : EG : : DH : EI.

Il suit de-là que si l'on divise le côté d'un triangle en un nombre quelconque de parties égales, & que des points de division on mene des parallèles à la base, ces parallèles diviseront l'autre côté en un même nombre de parties égales; & réciproquement, si ces lignes divisent les deux côtés du triangle en parties égales, elles seront parallèles à la base.

106... *Donc si par un point* H *pris à volonté sur un des côtés* AB *du triangle* BAC, *on mène la droite* HI, *parallèlement au côté* BC, *les deux côtés* AB, AC *de ce triangle seront coupés proportionnellement aux points* H & I; c'est-à-dire, qu'on aura toujours, $\begin{cases} AH : AI :: HB : IC \\ AH : AI :: AB : AC \end{cases}$

Ou en changeant les places des moyens, on aura $\begin{cases} AH : HB :: AI : IC \\ AH : AB :: AI : AC \end{cases}$

Donc réciproquement toutes les fois que deux côtés d'un triangle seront coupés proportionnellement par une ligne quelconque, cette ligne sera nécessairement parallèle au troisième côté.

107... La proposition énoncée ci-dessus (105), fournit un moyen bien simple de diviser une ligne en parties égales ou en parties qui aient entr'elles des rapports donnés.

PROBLÊME.

Diviser une ligne en parties égales, ou former une échelle de parties égales.

FIG.

Veut-on, par exemple, conſtruire l'échelle de dixme dont on ſe ſert le plus ſouvent, ſoit pour tracer ſur une carte les différentes parties d'un payſage, d'une île, d'une côte, ſoit pour réduire une figure de grand au petit ? Sur une ligne indéfinie AL, (*fig.* 34e.) portez dix fois une même ouverture de compas, aux extrémités A & B, élevez les perpendiculaires AC, BD, diviſez chacune de ces perpendiculaires en dix parties de grandeur arbitraire, mais égales entre elles; & par tous les points de diviſion, menez des parallèles à la ligne indéfinie AL; tirez enſuite des tranſverſales par tous les points de diviſion de AB & de CD, de la manière indiquée dans la *figure* 34e. 34

D'après cette conſtruction, il eſt évident que ſi AB repréſente 10 lieues, chaque petit quarré vaudra une lieue, & chaque ſubdiviſion $\frac{1}{10}$me. de lieue; & ſi chaque petit quarré vaut $\frac{1}{3}$ de lieue, c'eſt-à-dire, un mille, chaque ſubdiviſion vaudra $\frac{1}{10}$me. de mille. Suppoſons qu'on veuille avoir ſur cette échelle 9 milles & $\frac{7}{10}$ de mille, il eſt clair que 9 milles ſeront repréſentés par (*rſ*), & les $\frac{7}{10}$ par (*ſt*), puiſqu'à cauſe que (*tſ*) eſt parallèle à AI, le triangle ACI eſt coupé proportionnellement aux points *t* & *ſ*: on a donc cette proportion CA : C*t* : : AI : *tſ*; c'eſt-à dire, 10 : 7 : : 1 : $\frac{7}{10}$.

Ainſi les 9 milles & $\frac{7}{10}$mes. ſont repréſentés ſur l'échelle par la ligne entière (*tr*). On trouveroit de même toute autre partie entière ou fractionnaire de cette échelle.

FIG.

AUTRE PROBLÈME.

108... *Trouver une quatrième proportionnelle à trois lignes données* AB, AE, AC.

35 Après avoir tiré deux lignes indéfinies AF, AL (*fig.* 35e.), qui fassent entr'elles un angle quelconque, on portera la première ligne donnée AB sur AF; on portera de même la seconde sur AL, & on menera la ligne BE. On portera de même la troisième ligne donnée de A en C sur le côté AF; & ayant tiré la parallèle CD, la ligne AD sera la quatrième proportionnelle demandée.

Car à cause des parallèles, les côtés AF, AL sont coupés proportionnellement; on a donc AB : AE :: AC : AD.

C'est sur ce principe qu'a été construit le compas de proportion; ce compas a plusieurs usages, mais sur-tout on s'en sert commodément pour trouver les lignes proportionnelles.

109... *Caractères de la similitude des Triangles.*

Ces caractères sont essentiels pour juger de la similitude de deux figures; car pour qu'elles soient semblables, ce n'est pas assez qu'elles soient divisées en un même nombre de triangles, il faut encore que ces triangles soient semblables dans chacune. Nous allons établir ici les caractères auxquels on doit reconnoître la similitude des triangles.

THÉORÊME XI.

Premier Caractère.

36 110. *Deux triangles* (*acd*) ACD (*fig.* 36e.),

qui ont deux angles égaux, chacun à chacun, ont aussi leurs côtés homologues proportionnels, & sont par conséquent semblables.

On appelle en général dimensions *homologues* de deux figures semblables, les lignes de même dénomination ou semblablement situées dans chacune.

Si l'angle (*a*) du premier triangle est égal à l'angle A du second, l'angle (*c*) égal à l'angle C, le troisième dans chacun sera nécessairement égal; donc les côtés homologues seront proportionnels; car si l'on applique le petit triangle sur le grand, de manière que l'angle (*a*) tombe sur l'angle A, à cause de l'égalité des angles, les côtés (*ac*), (*ad*) tomberont sur les côtés AC, AD, & le troisième côté (*cd*) sera parallèle au côté CD : on aura donc cette suite de rapports égaux :

$$ad : AD :: ac : AC :: cd : CD;$$

c'est-à-dire, que le côté (*ad*) du premier sera contenu dans le côté AD du second, autant de fois que (*ac*) l'est dans AC, & que (*cd*) l'est dans CD; donc ces deux triangles seront parfaitement semblables.

111... On peut encore tirer de-là cette conséquence, que deux triangles quelconques seront semblables, lorsqu'ils auront les côtés parallèles, ou encore lorsqu'ils auront les côtés homologues perpendiculaires entr'eux, parce que dans l'un & l'autre cas, ils auront leurs angles égaux.

THÉORÊME XII.

Second Caractère.

112... *Deux triangles qui ont un angle égal compris entre deux côtés proportionnels, ont aussi les deux autres angles égaux, & par conséquent semblables.*

En supposant les mêmes triangles, si l'angle (a) du premier est égal à l'angle A du second ; & si les côtés qui comprennent cet angle sont tels en même tems qu'on ait ac : AC : : ad : AD, je dis que ces deux triangles auront leur troisième côté parallèle, & par conséquent dans le même rapport que les deux premières ; donc ils seront semblables.

THÉORÊME XIII.

Troisiéme Caractère.

113... *Deux triangles qui ont leurs trois côtés homologues proportionnels, ont nécessairement leurs angles égaux, & sont par conséquent semblables.*

Si les côtés homologues des deux triangles (acd) ACD sont tels, qu'on ait ad : AD : : ac : AC : : cd : CD, en appliquant ces deux triangles l'un sur l'autre, le troisième côté du premier sera nécessairement parallèle au troisième côté du second, ainsi que nous l'avons fait voir ; donc les angles a, c, d, seront égaux aux angles A, C, D ; par conséquent les deux triangles seront parfaitement semblables.

FIG.

114... La ſimilitude de deux triangles ne dépend donc que d'une ſeule condition ; car s'ils ont leurs angles égaux, on conclut que leurs côtés homologues ſont proportionnels ; & ſi leurs côtés homologues ſont proportionnels, on conclut de l'égalité de leurs angles. Une de ces conditions ſuffit donc dans les triangles, puiſqu'elle entraîne néceſſairement l'autre. Mais il n'en eſt pas ainſi des figures qui ont plus de trois côtés : ces deux conditions ſont abſolument néceſſaires à la fois, pour conclure de leur ſimilitude, ainſi que nous le verrons dans peu.

THÉORÊME XIV.

115... *Si deux cordes* AB, CD (fig. 37e.), *où un diamètre & une corde ſe coupent dans un cercle, ſous quelque angle que ce ſoit, les parties de l'une ſeront réciproquement proportionnelles aux parties de l'autre; c'eſt-à dire, qu'on aura cette proportion*, AE : CE : : DE : BE. 37

Pour ſe convaincre de la vérité de cette propoſition, qu'on mène les cordes AC, BD, les deux triangles AEC, BED, ſeront ſemblables, puiſqu'outre l'angle en E, égal de part & d'autre, on a CAB=BDC; donc AE : CE :: DE : BE.

116... La même choſe aura encore lieu ſi la corde CD (*fig.* 38e.), eſt perpendiculaire ſur le diamètre AB; dans ce cas, comme dans le précédent, on aura AE : CE :: DE : BE; mais comme la corde eſt coupée en deux parties égales, & que CE=DE, la proportion ſe change en 38

FIG. celle-ci, $\div\!\!\div$ AE : CE : BE. Donc toute perpendiculaire CE, abaiſſée d'un point quelconque C de la circonférence ſur le diamètre, eſt moyenne proportionnelle entre les deux ſegmens AE, BE, de ce diamètre.

De là on tire la manière de réſoudre le problême ſuivant.

PROBLÊME.

39 117... *Trouver une ligne qui ſoit moyenne proportionnelle entre deux lignes données* AC, BC, (*fig.* 39e.).

Joignez ces deux lignes bout à bout ; & du milieu de leur ſomme, comme centre, décrivez une demi-circonférence. Du point de réunion de ces deux lignes, élevez la perpendiculaire BD jusqu'à la rencontre de la circonférence, cette perpendiculaire ſera la moyenne proportionnelle demandée.

THÉORÊME XV.

40 118... *Si d'un point quelconque* A, *hors de la circonférence d'un cercle* (fig. 40e.), *on mène deux ſecantes* AB, AC, *juſqu'à la partie concave du cercle, & ſous quel angle que ce ſoit, ces ſecantes ſeront réciproquement proportionnelles à leurs parties extérieures* AF, AG ; c'eſt-à-dire, qu'on aura toujours AB : AC : : AG : AF.

En effet, ſi l'on tire les deux cordes BG, CF, on aura deux triangles ſemblables AGB, AFC ; car outre l'angle A de commun, ils ont encore l'angle B=C ; donc AB : AC : : AG : AF.

Si l'on conçoit maintenant que la secante FIG. AC s'éloigne de AB, en tournant autour du point A, & vienne dans la position AH ; si l'on imagine en même tems deux cordes menées de H en B & en F, on aura, en vertu de cette construction, deux nouveaux triangles semblables, ABH, AFH, qui donneront cette autre proportion, AB : AH : : AH : AF, d'où l'on conclura que la tangente AH est moyenne proportionnelle entre la secante entière & sa partie extérieure.

On se sert de cette proposition pour déterminer en mer à quelle distance on peut porter sa vue, lorsqu'on est élevé d'une certaine quantité au-dessus de sa surface.

Des Polygones semblables.

119... Deux figures d'un même nombre de côtés sont semblables, lorsque tous les angles de l'une sont égaux aux angles correspondants de l'autre, & que leurs côtés homologues sont proportionnels. Ces deux conditions sont nécessaires à la fois pour établir la similitude entre les figures qui ont plus de trois côtés.

THÉORÊME XVI.

120... *Si de deux angles correspondants* A *&* (a) *de deux polygones semblables* ABC DEF, (abcdef) (fig. 41e.), *on mène des diagonales aux autres angles, ces deux polygones seront partagés en un même nombre de triangles semblables ; & réciproquement si ces polygones sont divisés en un* 41

même nombre de triangles ſemblables, ils ſeront ſemblables entr'eux.

Par la première ſuppoſition, l'angle B eſt égal à l'angle (*b*), & les côtés AB, BC, ſont proportionnels aux côtés (*ab*) (*bc*); donc les triangles ABC (*abc*) ſont ſemblables, & donnent AB : *ab* :: BC : *bc* :: AC : *ac* : or par la même ſuppoſition, on a BC : *bc* :: CD : *cd*; donc AC : *ac* :: CD : *cd*. Les deux triangles ACD, *acd*, ont donc un angle égal; chacun à chacun, compris entre deux côtés homologues proportionnels; donc ils ſont ſemblables. On fera voir de même que les deux triangles ADE, AEF, ſont ſemblables aux triangles correſpondants (*ade*) (*aef*), & que par conſéquent les deux polygones ſont partagés en un même nombre de triangles ſemblables; donc les angles de l'un ſont égaux aux angles homologues de l'autre.

2°. Si ces polygones ſont compoſés d'un même nombre de triangles ſemblables, on a cette ſuite de rapports égaux, AB : *ab* :: BC : *bc* :: AC : *ac* :: CD : *cd* :: AD : *ad* :: DE : *de* :: AE : *ae* :: FE : *fe* :: AF : *af*. Ne prenant de cette ſuite que les rapports formés par les côtés extérieurs de ces deux polygones, on aura AB : *ab* :: BC : *bc* :: CD : *cd* :: DE : *de* :: EF : *ef* :: AF : *af*; donc ces deux polygones ont auſſi leurs côtés homologues proportionnels, & ſont par conſéquent ſemblables.

121. *De cette dernière ſuite de rapports égaux, on peut conclure que les contours ou les périmètres de deux polygones ſemblables, ſont*

entr'eux comme deux côtés homologues quelconques. FIG.

Car dans une ſuite de rapports égaux, la ſomme de tous les antécédens eſt à la ſomme de tous les conſéquens, comme un antécédent quelconque eſt à ſon conſéquent ; on aura donc ici AB+BC+CD+DE+EF+AF : *ab*+*bc*+*cd*+*de*+*ef*+*af* : : AB : *ab* ; c'eſt-à-dire, que le périmètre ou le contour du polygone ABCDEF eſt au contour du polygone (*abcdef*), comme le côté AB du premier eſt au côté homologue (*ab*) du ſecond ; donc, &c.

Si les polygones ſont réguliers, il ne ſera pas moins vrai que leurs périmètres ſeront entr'eux comme leurs côtés correſpondants, ou comme la $\frac{1}{2}$, le $\frac{1}{3}$, le $\frac{1}{4}$, & en général comme une partie quelconque de leurs dimenſions homologues.

122... Puiſque les cercles peuvent être regardés comme des polygones ſemblables compoſés d'une infinité de côtés, leurs contours ; c'eſt-à-dire, *leurs circonférences, ſeront donc entr'elles comme leurs diamètres, comme leurs rayons, ou comme les arcs d'un même nombre de degrés, & par conſéquent comme les cordes qui les ſoutendent.*

THÉORÊME XVII.

123... *Dans les cercles inégaux, les cordes* BE, DF, (fig. 42e.) *des arcs ſemblables, ou d'un même nombre de degrés, ſont entr'elles comme les rayons* CB, CD, *de leurs cercles.* 42

Car les deux triangles CBE, CDF, étant

ſemblables en vertu de ce qui a été dit (112, 113), on aura donc cette proportion, BE : DF :: CB : CD. Donc, &c.

Les principes que nous venons de dévélopper, ſont la baſe de toutes les connoiſſances mathémathiques théoriques & pratiques. C'eſt ſur la ſimilitude des triangles qu'eſt fondée la ſolution des principaux problêmes de navigation, puiſque dans tous les cas on fait ſur les cartes marines, ſur le quartier de réduction, ou directement par le calcul, des triangles ſemblables à ceux qu'on peut imaginer ſur la ſurface de la mer, décrits par le mouvement du vaiſſeau d'une part, & par la rencontre des méridiens & des parallèles de latitude de l'autre.

Toutes les opérations du compas de proportion pour réſoudre différens problêmes par le moyen de l'échelle des parties égales & de la ligne des cordes, ne ſont qu'une conſéquence immédiate de ce que nous avons dit ſur les lignes proportionnelles. Enfin c'eſt ſur les figures ſemblables, que porte l'art & toute la pratique de la levée des plans & des cartes. Il eſt donc eſſentiel de ſe rendre ces principes familiers.

De la meſure des Surfaces.

124... On appelle *ſurface* ou *ſuperficie*, tout ce que l'on conçoit n'avoir que deux dimenſions, longueur & largeur. Ces deux dimenſions ſont repréſentées dans la ſurface, par deux lignes perpendiculaires entr'elles, dont l'une s'appelle la *hauteur*, & l'autre la *baſe*. Par exemple,

la hauteur du parallelogramme ABCD, (*fig.* 43ᵉ.) eſt la perpendiculaire AE; & la ligne BC, ſur laquelle elle tombe, ſe nomme ſa baſe. Dans le rectangle, la hauteur ſe confond avec un des côtés, parce que dans cette figure les angles étant droits, les côtés ſont perpendiculaires entr'eux. FIG. 43.

125 ... La hauteur du triangle ABC (*fig.* 45ᵉ.) eſt la perpendiculaire AE, abaiſſée de l'angle A ſur le côté oppoſé BC, prolongé s'il eſt néceſſaire, & le côté BC eſt la baſe de ce triangle. 45.

126 ... Comme les lignes ſe meſurent par d'autres lignes, de même les ſurfaces ſe meſurent par d'autres ſurfaces. Tous les Géomètres ont adopté unanimement le quarré, pour ſervir d'unité de meſure aux ſurfaces, parce que c'eſt de toutes les figures régulières celle que l'on peut comparer plus facilement avec les autres, à cauſe de l'égalité de ſes angles & de ſes côtés.

127 ... En général, lorſqu'on ſe propoſe de meſurer une ſurface, on cherche combien de fois elle contient de petits quarrés d'un pouce, d'un pied ou d'une toiſe, ſelon que la meſure que l'on prend alors pour unité, eſt elle-même d'un pouce, d'un pied, ou d'une toiſe quarrée.

Par exemple, pour meſurer la ſurface du rectangle ABCD (*fig.* 46ᵉ.) en pieds quarrés, il faut chercher combien de fois ſa baſe BC contient le côté (*bc*) du pied quarré (*abcd*), pris pour unité de meſure; chercher de même combien de fois ſa hauteur AB contient (*ab*), & alors multipliant ces deux nombres l'un par l'autre, on aura 46

la quantité de pieds quarrés tels que (*abcd*), contenus dans la surface totale ABCD.

Si la base BC, par exemple, contient 8 fois (*bc*), & si AB contient (*ab*) 7 fois, toute la surface ABCD contiendra 56 pieds quarrés, tels que (*abcd*). En effet, si par les points de division de AB, on mène des parallèles à la base BC, on aura 7 rectangles, tels que B*mn*C, chacun de 8 pieds quarrés. En répétant le nombre de pieds quarrés de chacun de ces rectangles, autant de fois que le côté AB contient (*ab*); c'est-à-dire, 7 fois, on aura 56 pieds quarrés, tels que (*abcd*) contenus dans la surface ABCD.

128... On voit donc *que la surface d'un rectangle quelconque est égale au produit de sa base par sa hauteur*; mais il faut observer que dans cet énoncé les unités du multiplicande sont des unités superficielles, & que le multiplicateur est toujours un nombre abstrait qui exprime combien de fois il faut répéter les unités superficielles du multiplicande, pour avoir la surface totale du rectangle.

129... On se conduira de la même manière pour avoir la surface d'un parallelogramme. On cherchera combien de fois le petit quarré pris pour unité de mesure, est contenu dans la base, & combien de fois il l'est dans la hauteur. Multipliant ensuite le nombre des mesures de la base par celui de la hauteur, on aura la surface totale du parallelogramme en toises, pieds, ou pouces quarrés, selon qu'on aura mesuré en toises, pieds ou pouces.

130... Donc pour que deux parallelogrammes soient égaux en surface, il faut que le produit de la base de l'un multiplié par sa hauteur, soit égal au produit de la base de l'autre multiplié par sa hauteur ; & puisque ces deux produits doivent être égaux, on peut donc prendre les deux facteurs de l'un pour les extrêmes d'une proportion, & les deux facteurs de l'autre pour les moyens. Dans cette manière de les considérer, on peut donc dire que lorsque deux parallelogrammes seront égaux en surface, *ils auront leurs bases réciproquement proportionnelles à leurs hauteurs.*

Supposons qu'on ait la surface de deux parallelogrammes exprimée par ces deux produits égaux, 8×7 & 4×14, dont chaque premier terme désigne la base de chacun, on aura cette proportion, 8 : 4 :: 14 : 7, dans laquelle on voit *que leurs bases 8 & 4 sont réciproquement proportionnelles à leurs hauteurs.*

131... Puisqu'un triangle quelconque est la moitié d'un parallelogramme de même base & de même hauteur, il suit, de ce qui vient d'être dit, que pour avoir sa surface, il faut également multiplier sa base par sa hauteur, & prendre la moitié de ce produit ; ou, ce qui revient au même, multiplier la moitié de sa base par sa hauteur, ou sa base par la moitié de sa hauteur.

Donc deux triangles égaux en surface auront aussi leurs bases réciproquement proportionnelles à leurs hauteurs.

FIG.

THÉORÊME XVIII.

28 132... *La surface du trapèze* ABCD (*fig.* 28e.), *est égale à la demi-somme de ses deux côtés parallèles* AB, DC, *multipliée par sa hauteur* AE.

Car si l'on tire la diagonale AC, la surface du trapèze est divisée en deux triangles ABC, ADC, qui, ayant pour hauteur commune AE, ont pour base l'un AD, & l'autre BC; donc la surface du premier $= \frac{1}{2}$ AD×AE, & celle du second $= \frac{1}{2}$BC×AE; donc la surface totale du trapèze est égale à la demi-somme des deux côtés parallèles multipliée par AE; ce qui peut être exprimé ainsi, AD+BC×AE.

Si par le milieu G du côté AB, on mène GH parallelement aux deux bases opposées, cette parallèle sera égale à la demi-somme des deux bases, ce qu'on peut voir aisément par les triangles semblables formés d'après cette construction; de sorte que nous dirons que *la surface totale du trapèze* ABCD *est égale au produit de la parallèle* GH, *menée à égale distance des deux bases opposées, par la hauteur* AE.

133... On voit donc que pour avoir la surface d'un polygone quelconque, il faut le diviser en triangles par des diagonales menées d'un de ses angles, évaluer séparément la surface de chacun de ses triangles, & leur somme exprimera la surface totale du polygone.

134... Si le polygone est régulier (*fig.* 33e.), *sa surface sera égale au produit de son contour*

tour ABCDEF, *par la moitié de la perpendiculaire* CH, *abaissée de son centre sur l'un quelconque de ses côtés.* Cette perpendiculaire s'appelle l'*apothême* du polygone.

Car si du centre du polygone on mène des rayons à tous ses angles, ces lignes diviseront le polygone en autant de triangles égaux qu'il a de côtés. Or la surface de chacun de ces triangles, tels que CED, est égale au produit de la base ED, par la moitié de sa hauteur CH; donc la surface de tous ces triangles est égale au produit de la somme de toutes leurs bases par la moitié de la hauteur CH, & par conséquent la surface totale du polygone régulier est égale au produit de son périmètre par la moitié de son apothême.

135... Puisqu'on peut considérer le cercle comme un polygone régulier d'une infinité de côtés dont chacun se confond avec les différens points de sa circonférence, la perpendiculaire abaissée du centre sur chacun de ces côtés infiniment petits, doit être égale au rayon; par conséquent on peut dire que *la surface du cercle est égale au produit de sa circonférence par la moitié du rayon.*

136... Dans la comparaison des figures semblables, nous avons vu que les circonférences des cercles étoient entr'elles comme leurs diamètres, ou comme leurs rayons. Si en partant de ce principe, on vouloit déterminer la circonférence d'un cercle de 12 pieds; par exemple, connoissant d'avance la circonférence d'un autre

cercle & ſon diamètre, il eſt viſible qu'il ne s'agiroit que de calculer le quatrième terme de cette proportion.

Le diamètre de la circonférence connue eſt à ſa circonférence auſſi connue, comme le diamètre de 12 pieds eſt à ſa circonférence.

137... Toutes les recherches des Géomètres ſur le rapport du diamètre à la circonférence, ſe réduiſent à faire voir d'une part que ce rapport ne peut être exprimé en nombres finis & rationnels, & que par conſéquent la quadrature du cercle eſt introuvable ; & d'une autre, à nous donner des valeurs aſſez approchées & auſſi exactes qu'il eſt néceſſaire dans la pratique.

De tous les anciens Géomètres, *Archimède* paroît être le premier qui ſe ſoit occupé de cette recherche. En ſuppoſant que le diamètre d'un cercle fût de 7 pieds, il a trouvé que la longueur de ſa circonférence devoit être de 22 pieds, à très-peu de choſe près. Le rapport de 7 : 22 eſt le plus exact qu'on puiſſe eſpérer, lorſqu'on ne veut employer que deux chiffres à déterminer la circonférence d'un cercle d'un diamètre connu. On peut même ſe diſpenſer de calculer la proportion ; il ſuffit, pour avoir la longueur de la circonférence, de tripler ſon diamètre, & d'ajouter à ce triple la ſeptième partie de ce diamètre.

138... *Adrien Métius*, Mathématicien Hollandois, nous a donné un rapport beaucoup plus approché & plus exact que celui d'*Archimède* ; c'eſt celui de 113 : 355. Ce rapport eſt tel qu'il

faudroit que le diamètre d'un cercle fût de trois millions de pieds, pour qu'on fît, en se servant de ce rapport, une erreur d'un pied sur la circonférence.

PROBLÊME.

139... En se servant du rapport de *Métius*, *trouver la longueur de la circonférence d'un cercle de 12 pieds de diamètre, & déterminer sa surface en pieds quarrés.*

Pour avoir la longueur de la circonférence, je calculerai le quatrième terme de cette proportion.

$$113 : 355 :: 12 : x = 36\tfrac{92}{113}.$$

Pour avoir sa surface, je multiplierai la circonférence trouvée $36\frac{2}{113}$ de pied par la moitié du rayon, & j'aurai $110\frac{40}{113}$ de pieds quarrés pour la surface d'un cercle de 12 pieds de diamètre.

140... Si l'on demandoit de trouver la longueur d'un arc de 36°., appartenant à un cercle de 12 pieds de diamètre, après avoir calculé la longueur de la circonférence comme ci-dessus, on chercheroit le quatrième terme de cette proportion :

$$360^\circ : 36^\circ. :: 36\tfrac{92}{113} : x = 3\tfrac{770}{1130} \text{ de pied.}$$

Ce que nous venons de dire sur la mesure des surfaces est suffisant pour déterminer celle de toute espèce de figure rectiligne.

FIG.

De la Comparaison des surfaces.

141... Nous venons de voir que la surface d'un parallelogramme est égale au produit de sa base par sa hauteur. Donc, en comparant les surfaces de ces sortes de figures, nous dirons que les surfaces des parallelogrammes sont en général comme le produit des bases par les hauteurs; & à cause que les triangles ne sont que la moitié des parallelogrammes de même base & de même hauteur, les surfaces des triangles semblables sont donc aussi entr'elles comme la moitié de ce produit. Par exemple, en comparant les surfaces des deux
43 parallelogrammes (*fig.* 43e. & 44e.), nous dirons la surface ABCD : la surface GHLM :: BC×AE : HL×GI.

142... Donc les parallelogrammes & les triangles qui auront même hauteur, seront entr'eux comme leurs bases, & ceux qui auront même base, seront entr'eux comme leurs hauteurs; car le rapport de ces produits ne changera point, si l'on retranche de chacun le facteur qui leur est commun.

THÉORÊME XIX.

143... *Les surfaces des parallelogrammes semblables sont entr'elles comme le quarré de leurs côtés homologues.*

Car nous venons de voir que ABCD : GHLM
44 :: BC×AE :: HL×GI; mais ces deux parallelogrammes étant de figures semblables, les triangles ABE, GHI, le sont aussi : on a donc, à

cause de leur similitude, AE : GI :: AB : GH; FIG.
& à cause de la similitude des deux parallelogrammes, on a aussi BC : HL :: AB : GH. Donc en multipliant ces deux proportions par ordre, on aura AE×BC : GI×HL :: AB×AB : GH×GH; donc la surface ABCD : la surface GHLM :: $\overline{AB}^2$: $\overline{GH}^2$.

On peut en dire autant des triangles semblables, puisque les moitiés, & en général les parties semblables sont entr'elles comme les tous.

Donc en général les surfaces des polygones semblables sont entr'elles comme les quarrés des côtés ou des lignes homologues, puisque leur surface est divisée en un même nombre de triangles semblables & semblablement situés.

Donc, puisque les cercles sont des figures semblables, *leurs surfaces seront aussi entr'elles comme les quarrés de leurs diamètres, de leurs rayons, ou des cordes d'un même nombre de degrés.*

De là on peut déduire les propriétés du quarré de l'hypotheneuse, la quarante-septième proposition d'*Euclide*, & l'une des plus importantes de toute la Géométrie, à cause de son usage continuel, & de ses différentes applications. En voici l'énoncé.

Théorême XX.

144... *Dans tout triangle rectangle* BAC, *le quarré* BILC, *construit sur l'hypotheneuse* BC, 47.
est toujours égal à la somme des quarrés BAEF

FIG. $+$ACGH, *construits sur les deux autres côtés* AB, AC ; c'est-à-dire, qu'on a toujours $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$.

47 Si de l'angle droit A, on abaisse sur l'hypotheneuse la perpendiculaire AD, les deux triangles BDA, ADC, seront semblables entr'eux & au grand triangle BAC ; car outre qu'ils sont tous trois rectangles, le premier a l'angle B de commun avec le grand triangle, & le second a l'angle C ; ils sont donc tous deux semblables au triangle BAC, donc ils sont semblables entre eux ; par conséquent leurs surfaces seront entre elles comme le quarré de leurs côtés homologues : on aura donc cette suite de rapports égaux, BDA : $\overline{BA}^2$: : ADC : $\overline{AC}^2$: : BAC : $\overline{BC}^2$, ou BDA : BAEF : : ADC : ACGH : : BAC : BILC. Mais nous avons vu que dans une suite de rapports égaux, la somme des antécédens est à la somme des conséquens, comme un antécédent quelconque est à son conséquent ; donc on aura BDA$+$ADC : BAEF$+$ACGH : : BAC : BILC. Or il est évident que le triangle BAC vaut la somme de deux petits triangles BDA $+$ADC ; donc BILC vaut BAEF$+$ACGH, ou ce qui est la même chose, $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$.

Puisque le quarré de l'hypotheneuse vaut la somme des quarrés des deux côtés de l'angle droit, on doit conclure que le quarré d'un des

côtés de l'angle droit, vaut le quarré de l'hypotheneuse, moins le quarré de l'autre côté ; ce qui s'exprime de cette manière :

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2 \text{ ou } \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{AB}^2.$$

Donc, connoissant deux côtés d'un triangle rectangle, on peut toujours calculer le troisième ; car, en supposant l'hypotheneuse de 5 toises, le côté AC de 4, & le côté AB de trois, j'aurai $25 = 16 + 9$; donc $16 = 25 - 9$, ou $9 = 25 - 16$.

TRIGONOMÉTRIE.

145... On entend sous le nom général de *Trigonométrie*, l'art de déterminer les côtés ou les angles d'un triangle quelconque, par la connoissance de quelques-unes de ses parties ; & comme les triangles que l'on peut considérer, peuvent être rectilignes ou sphériques, delà vient aussi la distinction de cette partie de la Géométrie en *Trigonométrie rectiligne* ou *plane*, & en *Trigonométrie sphérique*.

La première dont nous allons nous occuper d'abord, enseigne à mesurer les angles & les côtés des triangles formés sur un même plan par des lignes droites.

La seconde qui suivra immédiatement après, a pour objet la résolution des triangles formés sur la surface de la sphère, ou dans la concavité des cieux, par l'interjection de trois arcs de grand cercle.

FIG. L'une & l'autre sont très-utiles aux Navigateurs, soit pour connoître la direction & la marche d'un navire, soit pour déterminer sa position sur la surface de la mer; mais les ressources de la seconde sont infiniment plus ingénieuses que celles de la première.

Principes généraux de Trigonométrie rectiligne.

146... Tout triangle ayant trois angles & trois côtés, est composé par conséquent de six parties. Le calcul trigonométrique consiste à trouver la valeur d'un angle ou d'un côté d'un triangle, par la connoissance de trois autres de ses parties, pourvu que dans ces trois parties il y ait un côté. Sans cela, la question seroit indéterminée, parce qu'avec trois angles donnés, on conçoit aisément qu'on peut former une infinité de triangles, qui, avec les mêmes angles, auront néanmoins les côtés homologues différens. Il faudroit donc que le calcul donnât à la fois toutes ces différences, ce qui est impossible.

48 147... Quoique, parmi les trois choses connues, il y entre un côté, il peut néanmoins arriver un cas où la question reste encore douteuse. Par exemple, dans le triangle ADC, si l'on ne connoît que les deux côtés AD, DC, & l'angle C opposé à l'un de ces côtés, on ne peut assigner précisément la valeur de l'angle A, ni celle du troisième côté AC; car avec les mêmes données, on peut former également ou le triangle ADC ou le triangle BDC, différens

entr'eux, comme l'on voit, quoique les côtés FIG. DC & DB ou DA soient les mêmes, ainsi que l'angle C. Dans ce cas, il faut savoir encore de quelle espèce doit être l'angle opposé à l'un des côtés connus. Ce cas se présente très-rarement dans la pratique.

148... Quoique le calcul de la Trigonométrie consiste, ainsi que nous l'avons dit, à trouver une des six parties d'un triangle dont on en connoît trois, cependant, pour exécuter la proportion nécessaire dans tous les cas, on ne fait pas usage des angles ou des arcs qui leur servent de mesure, puisqu'il n'y a pas de rapport exact entre les angles & les côtés d'un triangle; mais on substitue à leur place des lignes droites proportionnelles à ces côtés, & plus commodes à employer dans le calcul. Il convient donc, avant d'aller plus loin, de faire connoître ces lignes, & de faire voir comment elles peuvent tenir lieu des angles dans le calcul.

Des Sinus, co-Sinus, Tangentes, co-Tangentes, Secantes, co-Secantes.

149... Si d'un point C comme centre, & d'une 49
ouverture de compas arbitraire CB, on décrit une circonférence de cercle, & si l'on mène en dedans & en dehors de ce cercle des lignes semblables à celles que l'on voit dans la *fig.* 49e., la perpendiculaire AE sera le *sinus* de l'angle ACB ou de l'arc AB; la droite BD, perpendiculaire à l'extrémité du rayon BC, sera la *tangente* du

même angle ACB ; & la droite CD, qui n'eſt autre choſe que le rayon CA prolongé jusqu'à la rencontre de la tangente en D, ſera ſa *ſecante.*

150... On en dira autant des lignes droites qui appartiennent à l'angle ACH, complément de ACB. La perpendiculaire AL ſera donc le ſinus de l'angle ACH ou de l'arc AH ; HI ſera ſa tangente, & CI ſa ſecante.

Mais comme cet angle eſt le complément de ACB, on appellera AL, HI & CI, le ſinus, la tangente & la ſecante du complément de ACB ou de l'arc AB ; & pour abréger, on dira ſimplement *co-ſinus*, *co-tangente* & *co-ſecante.*

151... On voit donc que le ſinus d'un angle eſt une perpendiculaire abaiſſée de l'extrémité d'un de ſes côtés pris pour rayon ſur l'autre côté, prolongé s'il eſt néceſſaire.

Ou bien encore que le ſinus d'un arc quelconque eſt la moitié de la corde qui ſoutend un arc double ; par exemple, la droite AE, ſinus de l'arc AB, eſt la moitié de la corde AF, qui ſoutend l'arc ABF, double de AB.

152... De cette dernière définition, il ſuit que le ſinus d'un arc ou d'un angle de 30°., eſt égal à la moitié du rayon ; car il doit être la moitié de la corde de 60°., ou du côté de l'hexagone régulier que nous avons vu (102) être égal au rayon.

153... Lorſque l'angle ou l'arc qui lui ſert de meſure, eſt de 45°., ſa tangente eſt égale au rayon, ainſi que ſa co-tangente, parce qu'alors

les triangles rectangles CBD, CHI, deviennent égaux & izocelles. FIG.

154... Si l'on conçoit maintenant que l'angle ACB ou son arc AB augmente, il est visible que son sinus, sa tangente & sa secante augmenteront aussi. Par la même raison, son co-sinus, sa co-tangente & sa co-secante diminueront jusqu'à ce que l'angle aigu ACB soit égal à l'angle droit BCH. Alors son sinus sera égal au rayon CH, qui est le plus grand de tous les sinus, que, pour cette raison, on nomme *sinus total*. Sa tangente & sa secante seront parallèles entr'elles & infinies en longueur, puisqu'elles ne pourront plus se rencontrer. Son co-sinus, sa co-tangente & sa co-secante seront réduites à zero, puisqu'un angle droit n'a point de complément. 49

155... Mais si l'angle droit BCH passe 90°., son sinus, sa tangente & sa secante diminueront à mesure que cet angle deviendra plus obtus; au contraire, son co-sinus, sa co-tangente & sa co-secante augmenteront jusqu'à ce que cet angle ait atteint 180°. Parvenu à ce terme, il en sera de toutes ces lignes le contraire de ce qui avoit eu lieu, lorsque l'angle étoit arrivé à 90°.; c'est-à-dire, que le sinus, la tangente & la secante seront réduites à zero, tandis que le co-sinus sera égal au rayon C*b*, la co-tangente & la co-secante seront infinies.

156... Si nous considérons cet angle dans son état d'accroissement au-delà de 90°., lorsqu'il est devenu égal à *b*C*a*, par exemple, nous verrons

FIG. que cet angle obtus bCa n'a pas de ſinus, proprement dit; car ſi de l'extrémité (a) de l'arc BHa, qui lui ſert de meſure, on tire la perpen-
49 diculaire (ae), ſur le rayon qui paſſe par l'autre extrémité, cette ligne tombera hors de cet angle; & ſera le ſinus de l'angle aigu aCb, qui en eſt le ſupplément. Il en ſera de même du co-ſinus, de la tangente, de la co-tangente, &c.

Donc pour avoir le ſinus, le co-ſinus, la tangente, la co-tangente, &c. d'un angle, ou d'un arc au-deſſus de 90°., il faut prendre le ſinus, le co ſinus, la tangente, la co-tangente, &c. du ſupplément de cet angle ou de cet arc.

Idée générale de la conſtruction des Tables de ſinus, tangentes, &c.

157... Pour avoir une idée générale de la conſtruction des tables de ſinus, imaginons que le rayon du cercle ABFH ſoit diviſé en un très-grand nombre de parties égales, par exemple, en dix billions de parties, ſi l'on prend la grandeur du rayon pour meſure commune de toutes les lignes dont nous venons de parler, il eſt certain que les ſinus, tangentes & ſecantes contiendront plus ou moins de ces parties, ſelon qu'elles appartiendront à des angles plus grands ou plus petits. Enſuite les angles obtus n'ayant d'autre ſinus, que celui de leur ſupplément, il eſt donc ſuffiſant de chercher les ſinus des angles compris entre zero & 90°. De ſorte que le travail ſe trouve par là diminué de la moitié;

il le feroit bien davantage, si les sinus des angles FIG.
étoient proportionnels à la valeur de ces mêmes angles : car connoissant le sinus de 30°., par exemple, il feroit facile de trouver, par une simple proportion, le sinus d'un autre arc ou d'un autre angle quelconque. Mais il n'en est pas ainsi, comme nous l'avons dit (146) ; les sinus sont proportionnels aux côtés des angles, & non à la valeur de ces mêmes angles. La question est donc réduite à chercher les cordes de tous les arcs, depuis 2′, jusqu'à 90°. ; car la moitié de chacune de ces cordes est le sinus de la moitié de l'arc qu'elle soutend. Voilà l'objet fondamental des tables. 49

158... Après avoir trouvé les sinus de toutes les minutes du quart de cercle, par des méthodes analogues à celles qui sont en usage pour trouver la longueur d'un arc de cercle d'un diamètre connu, on a déterminé les co-sinus par les propriétés du quarré de l'hypothéneuse. Par exemple, dans le triangle rectangle AEC, connoissant le sinus AE & le rayon AC, pour avoir EC=AL, qui est le co-sinus de AB, du quarré du rayon ou de l'hypothéneuse AC, je soustrais le quarré de AE, & j'ai pour reste le quarré de EC, dont la racine est la valeur du co-sinus de l'arc AB.

Les sinus & co-sinus étant connus, on a trouvé par de simples proportions les tangentes, co-tangentes, les secantes & co-secantes de tous les angles aigus ou de tous les arcs au-dessous de 90°. Par exemple, qu'il soit question de

FIG. trouver la tangente de l'angle ACB, à cauſe des triangles ſemblables ACE, DCB, on aura CA : AE :: CD : BD; c'eſt-à-dire, co-ſinus AB
49 : ſinus AB :: rayon : tangente AB. Veut-on déterminer ſa ſecante CD? on aura CE : CA :: CB : CD; c'eſt à-dire, co-ſinus AB : R :: R : ſecante AB.

Comme ces deux dernières proportions ſont d'une grande utilité dans différens cas de la Trigonométrie rectiligne & ſphérique, il eſt bon, avant d'aller plus loin, de fixer ici leur propriété & l'uſage qu'on en peut faire.

159... Connoiſſant, par la première, la tangente de l'arc AB, ſi je veux avoir ſa co-tangente HI, à cauſe des triangles ſemblables DBC, CHI, j'aurai DB : BC :: CH : HI; c'eſt-à-dire, tang. AB : R :: R : co-tang. AB. Pour calculer la co-tangente d'un autre arc, tel que BG, dont la tangente ſeroit déja connue, je dirai tang. BG : R :: R : co-tang. BG.

Or ces deux dernières proportions ayant les mêmes termes moyens, les produits de leurs extrêmes doivent être néceſſairement égaux. On peut donc de leurs extrêmes former une nouvelle proportion, qui aura pour premier & quatrième terme les extrêmes de l'une, & pour termes moyens les extrêmes de l'autre; ce qui formera cette nouvelle proportion :

Tang. AB : tang. BG :: co-t. BG : co-t. AB;

par où l'on voit *que les tangentes des deux arcs ſont en raiſon inverſe ou réciproque de leurs co-*

tangentes. En effet, nous avons vu (154) que les co-tangentes diminuent à mesure que les tangentes augmentent, & réciproquement. FIG.

160... La seconde proportion qui nous a donné la secante de l'arc AB, peut nous fournir une propriété, qui est le fondement des cartes réduites; car de même que nous avons fait voir que co-s. AB : R :: R : sec. AB, nous prouverons aussi, pour tout autre arc quelconque, tel que BG, que co-sinus BG : R :: R : sec. BG; & en raisonnant comme ci dessus, on en déduira celle-ci, co-s. AB : co-s. BG :: sec. BG : sec. AB; ce qui fait voir *que les co-sinus de deux arcs sont en raison inverse de leurs secantes*; c'est-à-dire, *que les secantes augmentent comme les co-sinus diminuent, & reciproquement*. C'est de cette dernière propriété dont nous ferons usage, sur-tout pour la construction des cartes réduites. 49

161... Les Géomètres, dans la vue de simplifier les calculs de la Trigonométrie, ont déterminé les logarithmes des sinus, co-sinus, tangentes, &c., par les mêmes principes que ceux des nombres naturels; & la plupart des tables dont on fait usage aujourd'hui, ne contiennent que ces mêmes logarithmes qu'on emploie dans le calcul à la place de leur valeur numérique. Par ce moyen, toutes les opérations de Trigonométrie se réduisent presque toujours à de simples additions & soustractions: on peut même les réduire à la seule addition, par l'usage des complémens arithmétiques.

162... On entend par complément arithmé-

FIG. tique, la différence qu'il y a entre le logarithme du rayon qui eſt toujours 10,000,000, & celui du ſinus, co-ſinus, &c., d'un angle ou d'un arc quelconque; mais lorſqu'on ſe ſert des complémens arithmétiques, il faut retrancher de la caractériſtique du logarithme-ſomme autant de dixaines qu'on a employé de complémens arithmétiques. Nous aurons mille occaſions dans la ſuite d'éclaircir ceci par des exemples.

163... Les premiers Géomètres qui entreprirent le calcul des logarithmes des ſinus, co-ſinus, &c., ſuppoſerent que le rayon étoit diviſé en 10,000,000,000 de parties; mais comme les calculs ordinaires n'exigent pas une ſi grande préciſion, on ſupprima dans la ſuite les cinq derniers chiffres des valeurs numériques des ſinus, co-ſinus, &c. Néanmoins on conſerva toujours la même caractériſtique à leur logarithme; en ſorte que lorſqu'on fait uſage des logarithmes des ſinus, co-ſinus, &c., on calcule dans la ſuppoſition tacite que le rayon eſt toujours de 10 billions de parties; c'eſt pourquoi on ne doit pas être ſurpris de leur trouver une caractériſtique auſſi forte.

La réſolution de tous les problêmes de Trigonométrie rectiligne eſt fondée ſur cette propoſition générale.

THÉORÊME PREMIER.

50 164... *Dans un triangle rectiligne quelconque ADC, les ſinus des angles ſont entr'eux comme les côtés qui leur ſont oppoſés.*

Des

Des points A & C comme centres, & avec les rayons égaux AD, CF, décrivez deux arcs de cercle ; & de l'extrémité de chacun de ces arcs, abaissez les perpendiculaires DB, FE ; en vertu de ce qui a été dit (151), la droite DB sera le sinus de l'angle A, & FE celui de l'angle C. Donc, à cause des triangles semblables CBD, CEF, on aura DB : FE :: CD : CF ou AD ; c'est-à-dire, le sinus de l'angle A est au sinus de l'angle C, comme le côté DC, opposé au premier, est au côté AD, opposé au second. Donc, &c.

FIG. 50

165 ... *Résolution des Triangles rectangles.*

Comme dans les triangles rectangles, l'angle droit est une chose constante & connue, & que son sinus est égal au rayon, il suffit, dans ces sortes de triangles, de connoître deux choses, outre l'angle droit, afin d'être en état de déterminer tout le reste ; mais parmi ces connues, il doit y avoir un côté.

La résolution de tous les cas des triangles rectangles se réduit aux deux analogies suivantes, émanées de la proposition générale énoncée ci-dessus (164).

Dans tout triangle rectangle CBD (*fig.* 51e.)

PREMIERE ANALOGIE.

166 ... *Le rayon des tables, ou sinus total,*
est au sinus d'un des angles aigus, 51
comme l'hypothéneuse
est au côté opposé à cet angle aigu.

En effet, si dans le triangle CBD on prend CF pour le rayon des tables, FE sera le sinus de l'angle C ; & à cause des triangles semblables CEF, CBD, on a CF : FE : : CD : CB ; c'est-à-dire, le rayon des tables est au sinus de l'angle C, comme l'hypothéneuse est au côté opposé à cet angle.

On voit par là que dans tout triangle rectangle, en prenant l'hypothéneuse pour rayon, chaque côté de l'angle droit devient le sinus de l'angle qui lui est opposé. On se sert de cette première analogie dans les cas où l'on connoît l'hypothéneuse & un des angles aigus, ou l'hypothéneuse est un des côtés de l'angle droit.

Dans tout triangle rectangle CBD (*fig.* 54e.).

II. ANALOGIE.

167... *Le rayon ou le sinus total est à la tangente d'un des angles aigus, comme le côté de l'angle droit adjacent à cet angle est au côté opposé à ce même angle.*

Si l'on prend CE pour rayon des tables, EF sera la tangente de l'angle C ; & à cause des triangles semblables CEF, CBD, on aura CE : EF : : CB : BD ; c'est-à-dire, le rayon des tables est à la tangente de l'angle C, comme le côté BC, adjacent à cet angle, est au côté BD opposé à ce même angle.

Donc dans tout triangle rectangle, en prenant un des côtés de l'angle droit pour rayon, l'autre côté devient la tangente de l'angle qui lui est opposé. Cette seconde analogie peut servir dans

les cas où l'on connoît un angle aigu & un côté de l'angle droit, ou bien les deux côtés de l'angle droit. FIG.

On prévoit aisément qu'il est nécessaire de faire dans certains cas quelques légères permutations aux termes de ces deux analogies, afin d'en rendre l'application facile.

Nous allons éclaircir tout cela par des exemples; mais nous conseillons aux commençans d'avoir sous les yeux une rose des vents, afin de mieux saisir l'état de chaque question.

Exemple I.

168... Je suppose qu'un vaisseau, en partant du point C du triangle rectangle ABC, n°. 1, ait cinglé selon la ligne CA située au Nord-est, & qu'il ait avancé de 15 lieues vers le Nord, on demande la longueur de sa route. 52

Puisqu'il a cinglé au Nord-est, l'angle de sa route avec la ligne Nord & Sud, est de 45°. (1), on peut donc la représenter par la ligne AC parallèle au Nord-est; l'angle C de 45°. sera donc l'angle de rumb de vent par lequel il a cinglé, & la ligne AB exprimera les 15 lieues courues au Nord. Dans ce triangle ABC, on connoît deux choses, outre l'angle droit; savoir, le côté AB & l'angle C; donc l'angle A, complément de l'angle C, sera aussi connu; pour trouver AC,

(1) Les angles des rumbs de vent se comptent à partir du Nord ou du Sud, jusqu'à l'Est ou à l'Ouest.

FIG. qui eſt la longueur de ſa route, ou l'hypothéneuſe
52 du triangle ABC. On appliquera la première analogie, & on aura,

ſin. A : Rayon : : AB : AC
ou . . ſin. 45°. : R : : 15 lieues : AC longueur de ſa route.

Opérant par logarithmes on aura,

Logarithme du rayon :	10, 000000
Logarithme de 15 lieues . . .	1, 176091
Somme	11, 176091
Moins logarith. ſinus de 45°.	— 9, 849485
Différence	1, 326606

Ce logarithme, cherché dans les tables des nombres naturels, répond à 21 lieues & une fraction. Pour avoir cette valeur approchée à moins d'un dixième, il faut chercher ce logarithme avec une unité de plus à ſa caractériſtique, & on aura 21, 2; c'eſt-à-dire, 21 lieues plus deux dixièmes de lieues.

Exemple IIe.

169. En partant du point C, n°. 2, on a couru 32 lieues ſur la ligne AC, dont la direction eſt parallèle à la ligne Nord-nord-eſt de la bouſſole. On demande de combien on a avancé vers l'Eſt & vers le Nord.

L'angle du rumb de vent, ou l'angle C, étant de 22°. 30′, on connoît trois choſes dans le triangle rectangle ABC, n°. 2; l'angle droit B,

l'angle C & le côté AC. Pour trouver AB, qui représente la quantité dont on a avancé vers l'Est, on fera cette proportion, Rayon : sin. C :: AC : AB ; c'est-à-dire, Rayon : sin. 22°. 30' :: 32 lieues : AB. FIG. 52.

Opération par Logarithmes.

Logarithme sinus. . . .	22°. 30' . .	9, 582839
Logarithme de	32 lieues . .	1, 505150
Somme		11, 087989
Moins logarithme du rayon	—	10, 000000
Différence		1, 087989

= 12, 25 ; c'est-à-dire, que AB est de 12 lieues & 25 centièmes de lieues, parce que ce dernier logarithme a été cherché dans les tables, avec deux unités de plus à sa caractéristique.

Pour avoir BC, qui est la quantité dont on a avancé vers le Nord, on fera celle-ci, R : sin. A :: AC : BC ; c'est-à-dire, R : sin. 67°. 30', complément de 22°. 30' :: 32 lieues : BC.

Opération.

Logarithme sinus	67°. 30' . . .	9, 965615
Logarithme de	32 lieues . .	1, 505150
Somme		11, 470765
Moins logarithme du rayon	—	10, 000000
Différence		1, 470765

= 29, 56 de lieue, qui est la valeur de BC, approchée à moins d'un centième. On a donc

FIG. avancé de 12 lieues & 15 centièmes vers l'Eſt ;
52. & de 29 lieues & 56 centièmes de lieue vers le Nord.

Exemple IIIe.

170 ... On a fait 42 lieues vers l'Oueſt, ſur la ligne AC, n°. 3, dont la direction eſt inconnue, & on ſait qu'on a avancé de 35 lieues au Nord ou ſur la ligne BC. On demande la direction de la route AC ; c'eſt-à-dire, l'angle C, ou le rumb de vent qu'on a ſuivi.

On connoît, dans cet exemple, le côté BC, l'angle droit & l'hypothéneuſe ; il s'agit de trouver l'angle C. Comme les deux angles aigus A & C ſont complémens l'un de l'autre, l'angle C ſera connu, ſi nous pouvons déterminer l'angle A. Or pour trouver celui-ci, il faut calculer le quatrième terme de cette proportion AC : BC : : R : ſin. A ; c'eſt-à-dire, 42 lieues : 35 lieues : : R : ſin. A.

Opération par Logarithmes.

Logarithme de 35 lieues 1, 544068
Logarithme du rayon 10, 000000

Somme. 11, 544068

Moins logarithmes de 42 lieues — 1, 623249

Différence 9, 920819

$=$ 56°. 27'. Donc l'angle A eſt de 56°. 27' ; & par conſéquent l'angle de rumb de vent ou l'angle C, eſt de 33°. 33' $=$ N.-O. $\frac{1}{4}$ N. 12' Nord.

Exemple IV[e].

171... En partant du point C du triangle CBA, n°. 4, on a couru, selon la ligne AC, dont la position & la grandeur sont inconnues, c'est-à-dire, qu'on ignore par quel rumb de vent on a cinglé, & le nombre de lieues de la route; mais on sait qu'on a avancé de 15 lieues vers l'Ouest, & de 35 lieues au Sud. On demande la direction & la longueur de la route. 52

On connoît dans ce triangle les deux côtés AB, BC, avec l'angle droit, qui est toujours connu, & l'on demande l'angle C avec l'hypothéneuse. Pour trouver l'angle C, on calculera le quatrième terme de cette proportion,

BC : BA :: R : tang. C;
c'est-à-dire, 35 : 15 :: R : tang. C.

Opération.

Logarithme de 15 lieues	1, 176091
Logarithme du rayon	10, 000000
Somme	11, 176091
Moins logarithme de 35 lieues —	1, 544068
Différence	9, 632023

Ce logarithme est celui de la tangente C, qui répond dans les tables à 23°. 12'; c'est-à-dire, qu'on a cinglé au S.-S-O. 42' Ouest.

Pour avoir l'hypothéneuse ou la longueur de

la route, on caculera le quatrième terme de cette proportion :

sin. C : R : : AB : AC;

c'est-à-dire, sin. 23°. 12′ : R : : 15 lieues : AC.

Opération.

Logarithme du rayon	10, 000000
Logarithme de 15 lieues	1, 176091
Somme	11, 176091
Moins logarith. sinus 23°. 12′ —	9, 595432
Différence	1, 580659

= 38, 08 de lieue. La longueur de la route est donc de 38 lieues +, 08 centièmes de lieues.

172... Lorsqu'on connoît deux côtés quelconques d'un triangle rectangle, & qu'on veut trouver le troisième, on peut se servir des propriétés du quarré de l'hypotheneuse. Ici, par exemple, connoissant les deux côtés AB, BC, l'un de 15 & l'autre de 35 lieues, pour trouver l'hypotheneuse, je prends le quarré de 15, qui est 225; & l'ajoutant au quarré de 35, qui est 1225, j'ai 1450 pour le quarré de l'hypotheneuse AC, dont la racine 38, 08, approchée à moins d'un centième, est la valeur de l'hypotheneuse, telle que nous l'avons trouvée ci-dessus.

173... C'est encore par la résolution des triangles rectangles, qu'on peut déterminer de combien il s'en faut que le rayon par lequel on vise à l'horison de la mer lorsqu'on est sur un vaisseau, élevé par conséquent d'une certaine

quantité, ne soit parallèle à la surface de la mer. FIG
On trouve aussi, par la même méthode, l'étendue de cet horison apparent; mais pour avoir ainsi l'angle de l'inclinaison de l'horison avec quelque précision, il faut se servir des tables dont les logarithmes sont calculés jusqu'à douze décimales.

Résolutions des Triangles obliquangles.

On donne le nom de triangles *obliquangles*, généralement à tous les triangles rectilignes qui n'ont pas d'angle droit.

174... Au moyen de la proposition générale 48
(164); savoir, *que les sinus des angles sont entr'eux, comme les côtés qui leur sont opposés*, on peut résoudre un triangle obliquangle, 1°. lorsqu'on connoît deux angles & un côté; 2°. lorsqu'on connoît deux côtés, & un angle opposé à l'un d'eux.

Premier cas. Si dans le triangle ADC, on connoît l'angle A, l'angle C & le côté CD, on aura l'angle D, en soustrayant la somme des deux angles connus de 180°.; & pour avoir successivement les deux côtés AD, DC, on fera les deux propositions suivantes:

sin. D : sin. A : : AC : CD
& sin. D : sin. C : : AC : AD.

Second cas. Si l'on connoît les côtés AB, CD, & l'angle D opposé à l'un de ces côtés, on déterminera l'angle A par cette proportion:

AC : CD : : sin. D : sin. A.

Mais il faut remarquer que l'angle A ne sera déterminé qu'autant qu'on saura s'il doit être aigu ou obtus; car il peut être l'un ou l'autre indifféremment, comme on le voit par la *fig.* 56e., puisqu'un angle quelconque a le même sinus que son supplément. Ce cas douteux n'a lieu que lorsque le côté AD du triangle obliquangle est plus petit que le côté opposé CD.

Avant d'établir les propositions nécessaires à la résolution des autres cas des triangles obliquangles, nous ferons précéder les deux *Lemmes* (1) suivants, qui doivent leur servir de base.

LEMME I.

175... *Si l'on connoît la somme de deux quantités & leur différence, on aura la plus grande, en ajoutant la demi-différence à la demi-somme; & la plus petite, en retranchant la demi-différence de la demi-somme.*

Soient, par exemple, 9 & 7; la somme de ces deux quantités sera 16, & leur différence 2. J'aurai donc la plus grande, en ajoutant la moitié de 16 à la moitié de 2; la plus petite, en retranchant la moitié de 2 de la moitié de 16. Ce que nous venons de dire de deux quantités numériques a lieu également pour deux autres grandeurs quelconques.

LEMME II.

176... *La somme des sinus de deux arcs ou de*

(1) On appelle *Lemme*, une vérité que l'on démontre pour éclaircir la proposition suivante.

deux angles inégaux, est à leur différence, comme la tangente de la demi-somme de ces deux arcs est à la tangente de leur demi-différence. FIG.

Soient AB, AC, les deux arcs proposés, compris dans le quart de cercle ADV; soient BG & CL leurs sinus, OG, OL leurs co-sinus. Si BC est la différence de ces deux arcs, & qu'on tire le rayon OD sur le milieu de cet arc, CD sera la moitié de leur différence, & DA la moitié de leur somme. Enfin, après avoir mené la corde CB, & par le point D la tangente TS, parallèle à cette corde, ainsi que les lignes FI, FM, BK, telles qu'on les voit dans la *fig.* 57e., on observera que CD étant égal à DB & EF=LI =IG, la distance LG est partagée en deux parties égales au point I; par conséquent CL+BG, somme des deux sinus =2FI, & CL—BG, différences des sinus = CK ou 2 CE; donc à cause des deux triangles semblables FIR, CEF, & de la propriété des parallèles, on aura cette suite de rapports égaux, 2FI : 2CE :: FI : CE :: FR : CF :: DS : DH. Ne prenant de cette suite que le premier & le dernier rapport, on conclura que *la somme des sinus des deux arcs* AB, AC, *est à leur différence, comme la tangente* DS *de leur demi-somme est à la tangente* DH *de leur demi-différence.* 57

177 ... Des propriétés de la même figure, on peut encore conclure que *la somme des co sinus de ces deux arcs est à leur différence, comme la co-tangente de la demi-somme est à la tangente de leur demi-différence.*

FIG. Car OG+OL, ſomme des co-ſinus =2OI, & OG—OL différence de ces co-ſinus =LG ou 2LI; donc à cauſe des triangles ſemblables, FMN, FEC, on a 2MF, ou 2OI : 2EF ou 2LI : : FN : FC : : DT : DH. Donc, &c. Nous ferons uſage de cette dernière propriété dans la Trigonométrie ſphérique.

THÉORÊME II.

48 178.... *Dans tout triangle rectiligne* ADC, *la ſomme de deux côtés eſt à leur différence, comme la tangente de la demi-ſomme des deux angles oppoſés à ces côtés, eſt à la tangente de la moitié de leur différence.*

Car en vertu de la propoſition générale (164), on a ſin. A : ſin. C : : CD : AD; donc ſuivant ce qui a été dit (16), ſin. A + ſin. C : ſin. A — ſin. C : : CD+AD : CD—AD; mais par le lemme précédent (176), *la ſomme des ſinus de deux arcs ou de deux angles eſt à leur différence, comme la tangente de leur demi-ſomme eſt à la tangente de leur demi-différence.* Donc, *puiſque les côtés d'un triangle rectiligne ſont entr'eux comme les ſinus des angles oppoſés*, dans le triangle ADC on aura donc CD+AD : CD—AD : : tang. $\frac{A+C}{2}$: tang. $\frac{A-C}{2}$; *c'eſt-à-dire, la ſomme des deux côtés* CD+AD, *eſt à leur différence, comme la tangente de la demi-ſomme des angles oppoſés* A+C, *eſt à la tangente de leur demi-différence.*

Cette proposition sert à résoudre un triangle FIG. obliquangle, dont on connoît deux côtés & l'angle compris.

Si dans le triangle ADC, on connoît l'angle D, 48 par exemple, & les deux côtés AD, DC, & qu'on veuille déterminer les deux autres angles A & C, on retranchera l'angle D de 180°. Le reste sera la somme des deux autres angles : on en prendra la moitié ; & cherchant sa tangente dans les tables des sinus, on construira cette proportion,

$$CD+AD : CD-AD :: \text{tang.} \frac{A+C}{2} : \text{t.} \frac{A-C}{2},$$

dans laquelle les trois premiers termes étant connus, le quatrième donnera la moitié de la différence de deux angles A & C. Alors, connoissant la demi-somme & la demi-différence de ces angles, en vertu du premier lemme, on aura le plus grand, en ajoutant la demi-différence à la demi-somme, & le plus petit au contraire en retranchant la demi-différence de la demi somme : enfin ces deux angles étant connus, on trouvera facilement le troisième côté.

PROBLÊME.

179. Supposons que A & C soient deux îles dans la mer ; & que, connoissant leur direction & leur distance par rapport à un même point D, on veuille déterminer de ce point leur situation respective AC.

Que DC soit, par exemple, de 2155 toises, 54

& situé au Sud ; que DA soit au Sud-est $\frac{1}{4}$ Sud & à la distance de 1650 toises du point D ; l'angle D sera donc de 33°. 45′, puisqu'il vaut trois rumbs de vent. Dans le triangle ADC, connoissant les deux côtés DA, DC, & l'angle D compris, il s'agit de déterminer les deux angles A & C, & le côté AC.

Pour calculer les angles, je retranche 33°. 45′ de 180°. Le reste, 146°. 15′, est la somme des angles inconnus, dont la moitié est 73°. 7′ $\frac{1}{2}$.

Pour avoir leur demi-différence, je calcule le quatrième terme de cette proposition :

$$CD+AD : CD-AD :: \text{tang.} \frac{A+C}{2} : \text{t.} \frac{A-C}{2}$$

c'est-à-dire, $3805^{t.} : 505^{t.} :: \text{tang.}\ 73°.7' : \text{t.} \frac{A-C}{2}$

Opération.

Logarithme de 505 toises	2, 703291
Logarithme tang. 73°. 7′ . . .	10, 517833
Somme	13, 221124
Moins logarith. de 3805 toises —	3, 580355
Différence	9, 640769

= tang. 23°. 37′ $\frac{1}{2}$, valeur de la demi-différence des angles inconnus. Pour avoir l'angle C, qui est le plus petit, je soustrais 23°. 37′ $\frac{1}{2}$ de 73°. 7′ $\frac{1}{2}$, & le reste 50°. 30′, est la valeur de l'angle C. Cet angle est formé par la ligne AC, inclinée sur la ligne méridienne DC, dans le sens du Sud & de l'Ouest.

Le point C est donc situé, par rapport au point A, dans la direction du Sud ouest, plus 5°. 30′ Ouest, parce que l'angle est de 45°. + 5°. 30′ = 50°. 30′. Le point A sera donc dans la direction opposée; c'est-à-dire, au Nord-est, plus 5°. 30′ par rapport au point C. Ce n'est qu'à partir de la ligne Nord & Sud, qu'on commence à compter les angles des rumbs de vent, ainsi qu'il a été dit dans la note du numéro (168). FIG.

Pour avoir le troisième côté AC, on cherchera le quatrième terme de cette proportion : Sin. C : sin. D :: DA : AC; c'est-à-dire, sin. 50°. 30′ : sin. 33°. 45′ :: 1650 : AC = 1187t, 4.

La distance des deux îles A & C est donc de 1187 toises, 4 dixièmes de toise.

THÉORÊME III.

180... *Dans tout triangle rectiligne* ADC, *si d'un angle quelconque* D, *on abaisse une perpendiculaire* DB *sur le côté opposé* (fig. 55e.), *ou sur son prolongement* (fig. 56e.), *on aura toujours cette proportion :* 55, 56

$$AC : AD + CD :: AD - CD : \begin{cases} AB - CB. \textit{fig. } 55^e. \\ AB + CB. \textit{fig. } 56^e. \end{cases}$$

c'est-à-dire, le côté AC, sur lequel, ou sur le prolongement duquel tombe la perpendiculaire, est à la somme des deux autres côtés, comme la différence de ces mêmes côtés est à la différence des segmens AD — CD, ou à leur somme AD + CD, selon que la perpendiculaire tombe en

FIG. dedans ou en dehors du triangle. Cette proposition sert à trouver la valeur d'un triangle rectiligne, lorsqu'on connoît les trois côtés.

56 181... Si je me propose, par exemple, de trouver l'angle C du triangle ADC (*fig.* 55ᵉ.), il est certain que je ne puis pas m'aider, dans cette recherche, du rapport qu'il y a entre les côtés & les sinus des angles, puisque je n'en connois aucun. Je partage donc le triangle donné en deux triangles rectangles par une perpendiculaire abaissée d'un angle quelconque D sur le côté opposé; ensuite pour trouver la différence entre les deux segmens AD, CD, dont je connois la somme AC, du point D comme centre, & d'un rayon égal au côté DC, je décris une circonférence de cercle qui coupe les deux côtés AD, AC, puis je prolonge le côté AD jusqu'au point E; alors, à cause que deux secantes AE, AC sont réciproquement proportionnelles à leurs parties extérieures, j'ai (118) cette proportion, AC : AE : : AH : AG; mais puisque AE=AD+CD, que AH=AD−CD & AG=AB−CB, comme on le voit par la *fig.* 55ᵉ., la proportion ci-dessus se change en celle-ci, AC : AD+CD : : AD−CD : AB−CB; donc, &c.

Connoissant enfin la demi-somme & la demi-différence des deux segmens, je connaîtrai deux côtés du triangle CBD; outre l'angle droit, il sera donc facile de trouver l'angle C.

Pour rendre ceci plus sensible, joignons l'exemple au précepte.

Exemple.

FIG.

Exemple.

182... Soit propofé de trouver l'angle C du triangle obliquangle ADC (*fig.* 55e.), dont le côté AC eft de 236 toifes, le côté AD de 190 toifes, & le côté CD de 166. 55,56

Ayant abaiffé la perpendiculaire DB, je cherche la différence des deux fegmens AB, BC, par cette proportion : AC=236 t. : AD+CD =356 t. : : AD—CD = 24 t. : AB—BC =36, 20 de toife. Le petit fegment BC eft donc égal à la moitié de 236, moins la moitié de 36, 20; c'eft-à-dire, 99, 90 de toife. Si j'euffe opéré fur le triangle ADC (*fig.* 56e.), j'aurois abaiffé la perpendiculaire fur le prolongement de AC; & connoiffant déjà la différence des deux fegmens AB—BC=AC, la proportion AC : AD+CD : : AD—CD : AB+BC m'auroit donné leur fomme.

Dans le triangle rectangle CBD (*fig.* 55e.), connoiffant les deux côtés BC, CD & l'angle droit, on cherchera l'angle BDC, complément de l'angle C demandé par cette proportion, CD : CB : : R. : fin. BDC ou 166 t. : 99, 90 : : R : fin. BDC ou co-finus C.

Logarithme de 99, 90	1, 999565
Logarithme du rayon	10, 000000
Somme	11, 999565
Moins logarithme de 166 . . .	—2, 220108
Différence	9, 779457

= 37°., à très-peu près le logarithme finus de

FIG. l'angle BDC = 37°. Donc l'angle C, qui eſt ſon complément, eſt de 53°.

183. On peut encore réſoudre ce problême de cette manière, & c'eſt celle dont on ſe ſert le plus ordinairement.

De la moitié de la ſomme des trois côtés, retranchez ſucceſſivement chacun des deux côtés qui comprennent l'angle cherché, ce qui vous donnera deux reſtes. Aux logarithmes de ces deux reſtes; ajoutez les complémens arithmétiques des logarithmes des deux côtés qui comprennent l'angle cherché; prenez l a moitié de cette ſomme, & vous aurez le logarithme ſinus de la moitié de l'angle cherché.

OPÉRATION.

55 AD.....190.
AC......236...Compl. arith....7,627088
CD.....166...Compl. arith....7,779892
Somme..592.
Moitié...296.
1er. reſte..60... Logarithme... 1,778151
2e. reſte. 130... Logarithme... 2,113943
Somme...... 19,299074
Demi-ſomme... 9,649537

= 26°. 30′. Ces 26°. 30′ ſont la moitié de l'angle C cherché, dont le double 53°. eſt ſa juſte valeur.

Cette dernière ſolution eſt fondée ſur l'analogie ſuivante.

Le produit des deux côtés, qui comprennent l'angle cherché; eſt au produit des deux reſtes; comme le quarré du rayon eſt au quarré du ſinus de la moitié de l'angle cherché.

TRIGONOMÉTRIE SPHÉRIQUE.

La Trigonométrie *sphérique* eſt la ſcience qui apprend à réſoudre les triangles formés ſur la ſurface d'une ſphère, par l'interſection de trois de ſes grands cercles.

184... On doit conſidérer un grand cercle comme une ſection de la ſphère faite par un plan qui paſſe par ſon centre. Toute ſection qui ne paſſeroit pas par le centre ſeroit à la vérité un cercle, mais un petit cercle, puiſqu'il n'auroit pas le même rayon que la ſphère; & comme on peut en concevoir une infinité différens entr'eux, leur inégalité eſt cauſe qu'on ne s'en ſert pas du tout dans la Trigonométrie.

185... L'axe d'un grand cercle eſt une ligne droite, paſſant par ſon centre, & perpendiculaire au plan de ce cercle. Les deux extrémités de cette ligne, qui vont ſe terminer à la ſurface de la ſphère, ſe nomment les *poles* de ce cercle.

186... Un angle ſphérique n'eſt autre choſe que l'inclinaiſon de deux grands cercles. On l'exprime communément par l'inclinaiſon de leurs circonférences, au point de rencontre; mais l'une & l'autre ſont parfaitement égales.

187... De ce qui vient d'être dit, on peut conclure, 1°. que l'interſection de deux grands cercles, paſſant par le centre de la ſphère, eſt néceſſairement un diamètre, & que leurs circonférences ſe coupent en deux points éloignés l'un de l'autre de 180°.

FIG. 181... 2°. Que les poles d'un grand cercle étant également éloignés de tous les points de sa circonférence, leur distance à chacun de ces points est mesurée par un arc de 90°.

189... Donc, quand un arc BH de grand
57 cercle est perpendiculaire sur un autre arc BE, il passe nécessairement par les poles de celui-ci, ou du moins il y passeroit prolongé suffisamment.

Et si deux arcs de grand cercle BH, EF, sont perpendiculaires à un troisième arc BE, le point A où ils se rencontreront, est le pole de celui-ci.

190... 3°. Qu'un angle sphérique FAH doit avoir pour mesure l'arc BE de grand cercle, que ses côtés, prolongés s'il est nécessaire, comprennent à la distance de 90°. depuis le sommet.

Qu'un angle sphérique quelconque FAH est toujours égal à l'angle rectiligne FIH ou BCE, formé par le sinus des deux arcs qui en sont les côtés, ou par les sinus de ces mêmes côtés prolongés jusqu'à 90°., puisque cet angle rectiligne n'est autre chose que l'inclinaison des cercles ABD, AED, dont les arcs AH, AF, font partie. Or ces deux sinus ne peuvent jamais former qu'un angle au-dessous de 180°. Donc la valeur de tout angle sphérique est moindre que 180°.

Propriétés des Angles sphériques.

191... Les angles sphériques ont les mêmes propriétés que les angles plans; c'est-à-dire, 1°. lorsqu'un arc de grand cercle tombe sur un autre, les deux angles qui en résultent, sont égaux à deux angles droits. 2°. Si l'on prolonge

ces deux arcs au-delà de leur point d'interſection, les angles oppoſés au ſommet ſeront égaux. 3°. Enfin, que la ſomme de tous les angles ſphériques, formés autour d'un point d'interſection, eſt de 360°.

Propriétés des Triangles ſphériques.

192... Un côté quelconque d'un triangle ſphérique eſt toujours moindre que 180°., ou d'une demi-circonférence de cercle.

Chaque côté d'un triangle ſphérique eſt plus petit que la ſomme des deux autres.

La ſomme des trois côtés d'un triangle ſphérique eſt toujours moindre que 360°.

193... La ſomme des trois angles d'un triangle ſphérique eſt toujours plus grande que 180°., & moindre que 540°., ou trois fois 180°., puiſqu'un ſeul ne peut aller juſqu'à 180°.

D'où il réſulte que les trois angles d'un triangle ſphérique peuvent être aigus, droits ou même obtus. Cette variation eſt cauſe que de la connoiſſance de deux angles dans un triangle ſphérique, on ne peut pas conclure la valeur du troiſième, comme dans les triangles rectilignes.

Dans tout triangle ſphérique, le plus grand côté eſt oppoſé au plus grand angle; le plus petit côté, au plus petit angle; & les côtés égaux, aux angles égaux, comme dans les triangles rectilignes.

194... Il y a quatre caractères d'égalité dans les triangles ſphériques. Deux triangles ſphériques ſont égaux, 1°. s'ils ont un côté adjacent à deux

FIG. angles égaux, chacun à chacun ; 2°. s'ils ont un angle égal compris entre deux côtés égaux ; 3°. s'ils ont les trois côtés égaux ; 4°. s'ils ont les trois angles égaux.

Il n'y a que ce dernier caractère qui ne soit pas commun aux triangles rectilignes.

Moyens de reconnoître si les Angles ou les côtés qu'on cherche dans la résolution des triangles rectangles, doivent être plus grands ou plus petits que 90°.

195... Dans les triangles sphériques rectangles, on nomme *hypotheneuse*, le côté opposé à l'angle droit, ou qu'on considère comme tel ; & les deux autres angles, quels qu'ils soient, s'appellent angles *obliques*.

196... Chacun des deux angles obliques d'un triangle sphérique rectangle est de même espèce que le côté opposé ; c'est-à dire, qu'il est de 90°., si le côté oppoié est de 90o., & plus grand ou plus petit que 90o., si le côté opposé est plus grand ou plus petit que 90°.

Cela est évident à l'inspection même de la
58 *fig.* 58e. Dans le triangle total BAE rectangle en A, il peut arriver que l'angle B soit opposé au côté AC < 90o., ou au côté AD=90°., ou bien au côté AE > 90°. Dans chacun de ces cas, il est évident que l'angle B sera de même espèce que le côté qui lui est opposé ; car lorsque AD =90°. le point D étant le pole de l'arc AB, le côté BD est perpendiculaire sur AB ; donc l'angle B est droit. Cet angle devient donc plus grand

ou plus petit, selon que l'arc AD est lui-même FIG.
plus grand ou plus petit que 90°. On en dira autant de l'angle E.

197... Si les deux côtés ou les deux angles obliques d'un triangle sphérique rectangle sont de même espèce, l'hypotheneuse est toujours moindre que 90°. S'ils sont de différente espèce, l'hypotheneuse est plus grande que 90°.

Pour sentir la vérité de cette proposition, il 59
suffit de considérer la *figure* 59e. Dans le triangle ACD rectangle en A, les deux angles obliques C & D étant aigus, l'hypotheneuse DC est plus petite que 90°. La même chose a lieu dans le triangle CBD, rectangle en B. Au contraire, dans le triangle AGH rectangle en G, l'angle A étant aigu & l'angle H obtus, l'hypotheneuse AH est plus grande que 90°.

198... Donc, puisque les angles obliques sont toujours de même espèce que leurs côtés opposés (196), il suit, 1°. que si dans un triangle sphérique rectangle les angles obliques sont de même espèce, l'hypotheneuse est plus petite que 90°. Elle est au contraire plus grande, s'ils sont de différente espèce, & réciproquement.

2°. Si l'hypotheneuse & un côté sont de même espèce, l'autre côté est moindre que 90°. Si l'hypotheneuse & un côté sont de différente espèce, l'autre côté est alors plus grand que 90°.

199... Le tableau ci-joint représente en abrégé ces six variations.

On peut mettre dans chaque cas les angles à la place des côtés.

côté ... $> 90^\circ$. côté ... $> 90^\circ$.	... Hypotheneuſe $< 90^\circ$.
côté ... $< 90^\circ$. côté ... $< 90^\circ$.	... Hypotheneuſe $< 90^\circ$.
côté ... $> 90^\circ$. côté ... $< 90^\circ$.	... Hypotheneuſe $> 90^\circ$.

200 ... Le même tableau ſuffit encore pour reconnoître dans les triangles rectangles tous les cas douteux ; c'eſt-à-dire, ceux où l'on ne peut ſavoir ſi ce que l'on cherche eſt plus petit ou plus grand que 90°. Cela arrive toutes les fois qu'étant donnés un angle & ſon côté oppoſé, on demande l'hypotheneuſe, ou l'autre angle, ou bien ſon côté oppoſé. Dans ce cas, pour réſoudre la queſtion, il faut encore ſavoir ſi ce que l'on cherche eſt au-deſſus ou au-deſſous de 90°. C'eſt à quoi ſe réduiſent tous les cas douteux des triangles ſphériques rectangles. Au reſte les cas douteux ſont très rares dans la pratique. On ſait preſque toujours par l'état de la queſtion qu'on ſe propoſe de réſoudre en Aſtronomie, & par conſéquent dans l'application qu'en peut faire un navigateur, ſi l'angle ou le côté qu'on cherche, eſt plus grand ou plus petit que 90°.

Par exemple, ſi connoiſſant la déclinaiſon du ſoleil & l'angle de l'obliquité de l'écliptique qui lui eſt oppoſé, on vouloit trouver l'aſcenſion droite ou la longitude du ſoleil, on ſauroit bien

à cette époque dans quelle saison on est, & par FIG.
conséquent la grandeur de l'arc de l'équateur ou de l'écliptique que l'on cherche.

Principes pour la résolution des Triangles sphériques rectangles.

201... Dans tout triangle sphérique rectangle ABC (*fig.* 60e.), si l'on prolonge les deux côtés AC, BC, jusqu'en E & en D, de manière que AE & BD soient chacun de 90°., & que du point A & du point D, comme poles, on décrive deux arcs de grand cercle qui aillent se réunir au point G, par cette construction, on aura un nouveau triangle CED rectangle en E, qui sera le complément de ABC.

Car puisqu'on a fait AE & BD de 90°. chacun, le point A est le pole de l'arc DEG, & le point D celui de l'arc ABG; donc les angles E & B sont droits. Il est évident aussi que AE & BD étant de quarts de cercle, le côté CE est complément de AC, & CD complément de BC; que DE, complément de l'arc EG, qui mesure l'angle A, est aussi complément de cet angle, & que l'angle D, qui a pour mesure BG, complément de AB, est aussi le complément de l'arc AB. On peut en dire autant du triangle AHI, formé de la même manière par le prolongement des côtés AC, AB. On appelle ces triangles, *complémentaires* de ABC, & réciproquement. 60

THÉORÊME I.

Dans tout triangle ſphérique rectangle, on a toujours cette proportion.

I.

202... *Le rayon*
eſt au ſinus de l'hypotheneuſe,
comme le ſinus d'un des angles obliques
eſt au ſinus du côté qui lui eſt oppoſé.

61 Soient AO, GO, HO, trois rayons de la ſphère; ſi après avoir conſtruit le triangle ſphérique ABC rectangle en B, & avoir mené les lignes CD, CE, BD, on imagine les deux côtés AB, AC, prolongés juſqu'à 90°. en G & en H, il eſt clair que l'angle A aura pour meſure l'arc de grand cercle GH; que HI, qui eſt le ſinus de cet arc, ſera auſſi celui de l'angle A. Pareillement que la droite CD, perpendiculaire ſur le rayon AO, ſera le ſinus de l'hypotheneuſe AC, & CE ſera celui de l'arc BC oppoſé à l'angle A.

Cela poſé, à cauſe que les deux triangles rectilignes HIO, CED, perpendiculaires ſur le même plan AOB, ont leurs côtés parallèles, ils ſont néceſſairement ſemblables; on aura donc cette proportion:

HO : HI :: CD : CE ou HO : CD :: HI : CE;

c'eſt-à-dire, *le rayon eſt au ſinus de l'hypotheneuſe* AC, *comme le ſinus de l'angle* AC *eſt au ſinus de l'arc* BC *qui lui eſt oppoſé.*

62 203... Si le triangle eſt obliquangle, comme

ACD (*fig.* 62ᵉ.) ; & si de l'angle C, on abaisse l'arc CB, perpendiculairement sur le côté opposé, en vertu de la première analogie (202), on aura ces deux-ci : FIG. 62

R : sin. A : : sin. AC : sin. BC.
R : sin. D : : sin. CD : sin. BC.

dans lesquelles les deux extrêmes étant égaux, les deux moyens le seront aussi ; d'où on déduira cette troisième proportion :

Sin. A : sin. D : : sin. CD : sin. AC.

c'est-à-dire, que *dans tout triangle sphérique les sinus des angles sont entr'eux, comme les sinus des côtés qui leur sont opposés* ; proportion fondamentale de la Trigonométrie sphérique.

Des propriétés de la *fig.* 61ᵉ., on conclura aussi que *dans tout triangle sphérique rectangle, le rayon est au co-sinus d'un des angles obliques, comme la tangente de l'hypotheneuse est à la tangente du côté adjacent à cet angle oblique.* 61

Car en imaginant les deux secantes OM, ON prolongés jusqu'à la rencontre des droites AM, AN, dont la première est la tangente de l'hypotheneuse AC, & la seconde celle de AB, les plans des deux triangles OMN, AMN, étant perpendiculaires au plan de la base ACG, leur intersection MN sera aussi perpendiculaire à ce même plan. Donc le triangle rectangle AMN sera parfaitement semblable au triangle rectangle HIO ; car outre qu'ils ont chacun un angle droit, l'angle A du premier est égal à l'angle O

FIG. du second; puisque ces deux angles expriment l'un & l'autre l'inclinaison des deux plans de grand
61 cercle AGO, AHO. On a donc cette proportion:

OH : OI : : AM : AN ;

c'est-à-dire, *le rayon est au co-sinus de l'angle* A, *comme la tangente de l'hypotheneuse* AC *est à la tangente de* AB.

Mais si l'on prend le triangle ABC pour le triangle complémentaire de CED (*fig.* 60e.), cette proposition se changera en celle-ci:

R : sin. ED : : co-t. CE : co-t. D ; ou : : tang. D : t. CE.

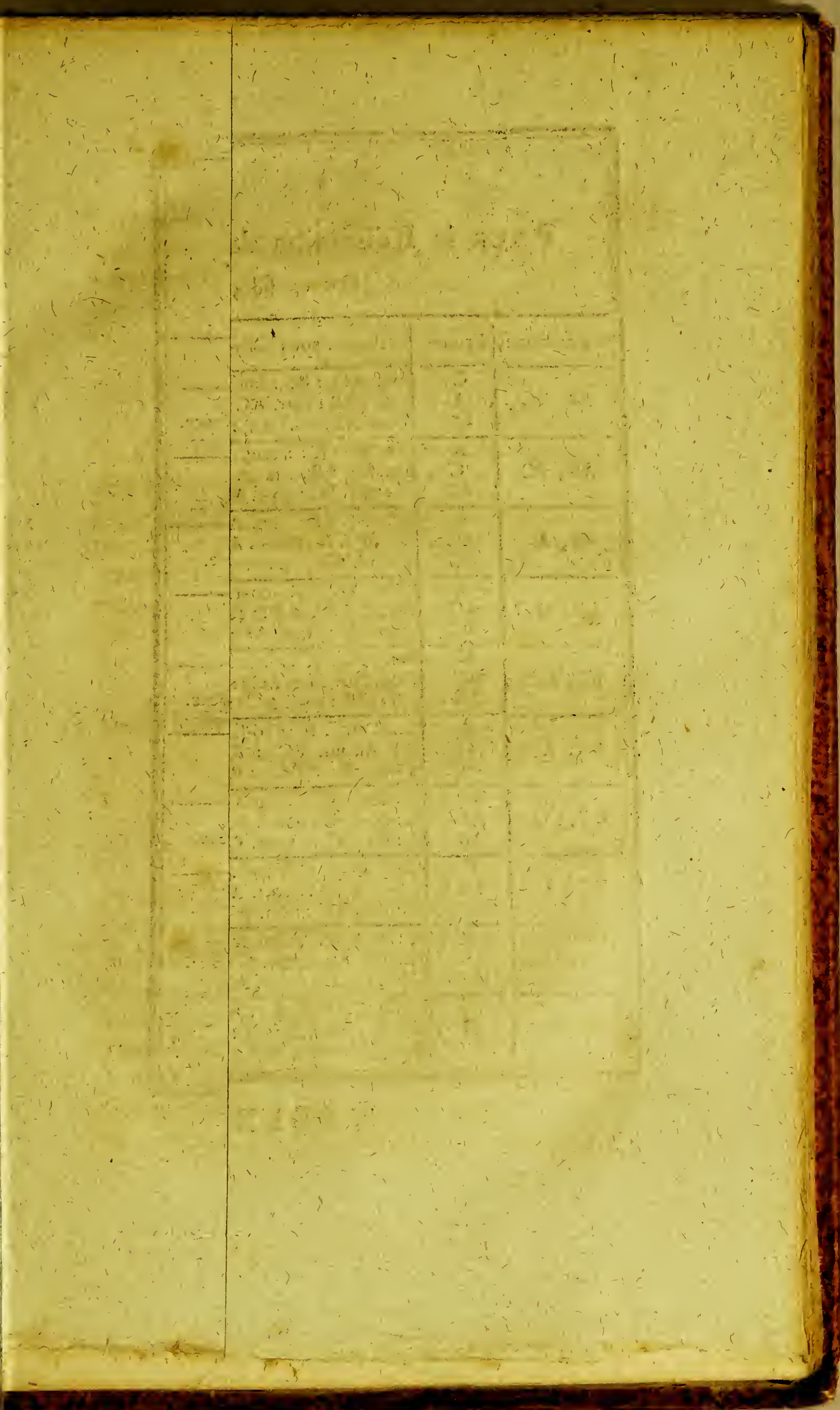
Car les tangentes sont réciproquement proportionnelles aux co-tangentes; c'est-à-dire, que dans le triangle sphérique rectangle, on aura cette proportion.

II.

204... *Le rayon*
est au sinus d'un des côtés de l'angle droit,
comme la tangente de l'angle oblique adjacent à ce côté,
est à la tangente du côté qui lui est opposé.

Au moyen des principes que nous venons d'établir, il n'y a point de triangle sphérique rectangle qu'on ne puisse résoudre facilement, pourvu que l'on connoisse trois de ses parties. Il faut remarquer que l'angle droit étant une chose constante, il suffit de connoître deux autres choses.

205... Tous les différens cas des triangles rectangles sont au nombre de trente, qu'on pour-



TABLE

Pour la Résolution de tous les cas possibles des Triangles sphériques rectangles.

On considere ici le Triangle ABC, *fig.* 60, comme Rectangle en B.

Etant donnés	Trouver	Proportions faites sur ABC.	Proportions faites sur les triangles complementaires, & transportées sur ABC.	
AB, AC	C	Sin. AC : R : : sin. AB : sin. C..	Tang. D : tang. CE : : R : sin. DE . . .	si AB est moindre que 90°.
	A	Co-t, AB : co-t. AC : : R: co-s. A.	Sin. D : sin. CE : : R : sin. DC	si AB & AC sont de même espèce.
	BC	Co-s. AB : co-s. AC :: R: co-s. BC		si AB & AC sont de même espèce.
AB, BC	A	Sin. AB : R : : tang. BC : t. A...		si BC est moindre que 90°.
	C	Sin. BC : R :: tang. AB : t. C...	R : sin. DC : : sin. D : sin CE	si AB est moindre que 90°.
	AC	R : co-s. BC : co-s. AB : co-s. AC..		si AB & BC sont de même espèce.
AB, A	C	R : co-s. AB : : sin. A : co-s. C...	R : sin. AI : : sin. A : sin. HI	si AB est moindre que 90°.
	AC	R : co-s. A :: co-t. AB : co-t. AC	R : sin. DE : : tang. D : tang. CE. . .	si AB & A sont de même espèce.
	BC	R : sin. AB :: tang. A : tang. BC		si A est moindre que 90°.
AB, C	A	Co-s. AB : R : : co-s. C : sin. A...	Sin. AI : R : : sin. HI : sin. A	Douteux.
	AC	Sin. C : sin. AB :: R : sin. AC..		Douteux.
	BC	Tang. C : tang. AB :: R sin. CB.		Douteux.
BC, AC	C	Sin. AC : R :: BC : sin. A.....	Tang. I : tang. AH : : R : sin. HI . . .	si BC est moindre que 90°.
	AC	Co-t. BC : co-t. AC :: R : co-s. C..	Sin. I : sin. AH : : R : sin. AI	si AC & BC sont de même espèce.
	AB	Co-s. BC : co-s. AC :: R : co-s. AB		si AC & BC sont de même espèce.
BC, A	A	Co-s. BC : R :: co-s. A : sin. C...	Sin. DC : R : : sin. DB : sin. C	Douteux.
	C	Sin. A : sin. BC :: R : sin. AC		Douteux.
	AB	Tang. A : t. BC :: R : sin. AB		Douteux.
BC, C	C	R : co-s. BC :: sin. C : co-s. A....	R : sin. DC : : sin. C : sin. DE	si BC est moindre que 90°.
	AC	R : co-s. C :: co-t. BC : co-t. AC	R : sin. HI : : tang. I : tang. AH . . .	si BC & C sont de même espèce.
	AB	R : sin. BC :: tang. C : tang. AB		si C est moindre que 90°.
AC, A	C	Co-s. AC : R :: co-t. A : t. C....	Sin. CE : R : : tang. DE : tang. C. . .	si AC & A sont de même espèce.
	AB	Co-s. A : R :: co-t. AC : co-t. AB	Sin. DE : R : : tang. CE : tang. D. . .	si AC & A sont de même espèce.
	BC	R : sin. AC :: sin. A : sin. BC....		si A est moindre que 90°.
AC, C	A	R : co-s. AC :: tang. C : co-t. A	R : sin. CE : : tang. C : tang. DE. . .	si AC & C sont de même espèce.
	AB	R : sin. AC :: sin. C : sin. AB....		si C est moindre que 90°.
	BC	Co-s. C : R :: co-t. AC : co-t. BC	Sin. HI : R : : tang. AH : tang. I . . .	si AC & C sont de même espèce.
A, C	AC	Tang. C : co-t. A : : R : co-s. AC	Tang. C : tang. DE : : R : sin. CE. . .	si A & C sont de même espèce.
	AB	Sin. A : co-s. C :: R : co-s. AB...	Sin. A : sin. HI : : R : sin. AI	si C est moindre que 90°.
	BC	Sin. C : co-s. A : : R : co-s. BC..	Sin. C : sin. DE : : R : sin. DC	si A est moindre que 90°.

TABLEAU relatif à la page 109 du I Tome.

toit absolument réduire à seize, en supprimant FIG.
ceux qui sont semblables. On les a renfermés tous dans la table suivante, où l'on suppose que l'angle droit est en B, & les deux autres angles 60
obliques en A & en C. La construction de cette table est fondée sur les deux analogies fondamentales démontrées ci-dessus (202) (204). Tantôt on applique immédiatement ces analogies au triangle ABC, tantôt il faut avoir recours à l'un des deux triangles complémentaires CED, AHI, (*fig.* 60e.) pour en transporter ensuite les résultats sur le triangle ABC. De sorte que la résolution de tous les cas des triangles sphériques rectangles ne dépend, à proprement parler, que des deux analogies (202 & 204): on ne se sert du triangle complémentaire, que pour en faciliter l'application dans certains cas, comme nous allons le faire voir.

EXEMPLE I.

206... Dans le triangle sphérique rectangle ABC, le côté AB étant de 34°., & l'hypotheneuse AC de 55°. 10', trouver la valeur de l'angle A.

Pour résoudre ce problême, il est aisé de voir qu'on ne peut appliquer immédiatement au triangle ABC, ni la première ni la seconde des analogies énoncées ci-dessus; il faut donc avoir recours au triangle complémentaire CED, dans lequel l'angle D & le côté CE sont compléments de AB & de AC. Pour trouver dans ce nouveau triangle le côté DE, complément de l'angle A demandé, on fera cette proportion, tang. D : t. CE

FIG. : : R : ſin. DE, qui eſt la même que la ſeconde analogie (204), en mettant le premier rapport à la place du ſecond ; la ſubſtituant enſuite au
60 triangle ABC, on aura co-t. AB : co-t. AC : : R : co-ſ. A ; c'eſt-à dire, co t. 34°. : co-t. 55°. 10′ : : R : co-ſ. A.

Opérant par logarithmes, on a :

Logarithme co-t. 55°. 10′ 9, 842535
Logarithme du rayon 10, 000000

Somme. . . . 19, 842535
Moins le logarithme co-t. 34°. — 10, 171013

Différence . . . 9, 671522
= co-ſ. 62°. 1′, qui eſt la valeur de l'angle A. On eſt certain que cet angle doit être moindre que 90°., parce que l'hypotheneuſe AC & le côté AB ſont tous deux de même eſpèce.

EXEMPLE II.

207. . . Le côté AB étant de 23°. 18′, & le côté BC de 29°. 30′, trouver l'angle C.

On peut faire uſage de la ſeconde analogie pour la ſolution de ce cas, & dire, ſin. BC : R : : tang. AB : tang. C.

Logarithme du rayon 10, 000000
Logarithme tang. 23°. 18′ 9, 634143

Somme . . . 19, 634143
Moins logarithme ſinus 29°. 30 — 9, 692339

Différence . . 9, 941804
= tang. 41°. 11′. L'angle C eſt donc de 41°. 11′.

Il doit être de même espèce que le côté AB, qui lui est opposé ; c'est-à-dire, moindre que 90°. FIG.

EXEMPLE III.

208... Etant donnés le côté BC de 70°. 48', & l'angle C de 37°. 50', trouver l'hypotheneuse AC. 60

Les données du problême ne permettent pas de se servir immédiatement du triangle ABC; il faut donc avoir recours au triangle complémentaire AIH, dans lequel l'angle I étant le complément du côté BC, & IH de l'angle C, on déterminera AH, complément de l'hypotheneuse demandée, par la seconde analogie, R : sin. IH : : tang. I : tang. AH ; & la substituant au triangle ABC, on aura, R : co-s. C : : co-t BC : co-t. AC ; ou R : co-s. 37°. 50' : : co-t. 70°. 48' : co-t. AC.

Logarithme co s. 37°. 50'	9, 897516
Logarithme co-t. 70°. 48'	9, 541875
Somme	19, 439391
Moins logarithme du rayon —	10, 000000
Différence	9, 439391

= co-t. 74°. 37' ; c'est-à-dire, que l'hypotheneuse AC est de 74°. 37' plus petite que 90° ; parce que les deux côtés de l'angle droit sont de même espèce.

EXEMPLE IV.

209... Etant donnés le côté BC de 15°. 17',

FIG. & l'angle A de 23°. 42', trouver l'hypotheneuse AC.

60 Il est aisé de voir que pour trouver l'hypotheneuse, on peut faire usage immédiatement de la première analogie.

Sin. A : sin. BC : : R : sin. AC,
ou sin. 23°. 42' : sin. 15°. 17'. : R : sin. AC.

Logarithme sin. 15°. 17' 9, 420933
Logarithme du rayon 10, 000000

Somme . . . 19, 420933
Moins logarith. sinus de 23°. 42' — 9, 604170

Différence . . 9, 816763

= sin. 40°. 59'. En sorte que l'hypotheneuse AC est de 40°. 59', si elle doit être moindre que 90°. ; ou de 137°. 1', si elle doit être au-dessus de 90°. Car rien ici ne détermine si elle doit être moindre ou plus grande que 90°. ; & ces deux solutions sont également possibles, comme il est aisé de s'en convaincre par la *fig.* 63e, dans laquelle les deux triangles ABC, ADE, peuvent, avec le même angle A, avoir le côté BC = DE, & les hypotheneuses AC, AE, différentes.

En général, toutes les fois que dans un triangle sphérique rectangle, on ne connoîtra qu'un des angles obliques & le côté qui lui est opposé, la valeur des trois autres parties restera indéterminée. Il n'y a que six cas de cette espèce, qu'on nomme

nomme *douteux* dans la résolution des triangles FIG.
sphériques rectangles.

Ces exemples suffisent pour faire voir comment on doit se conduire dans les autres cas.

C'est par des triangles sphériques rectangles, qu'on calcule la longitude & la latitude du soleil, connoissant par observation son ascension droite & sa declinaison.

Principes pour la résolution des Triangles sphériques obliquangles.

La résolution de tous les cas possibles des triangles obliquangles porte sur quatre principes ou analogies que nous allons exposer, & sur la résolution des triangles rectangles.

PREMIER PRINCIPE.

210... *Les sinus des angles sont entr'eux, comme les sinus des côtes qui leur sont opposés.*

Cette analogie est commune aux triangles sphériques rectangles, ainsi que nous l'avons vu.

THÉORÊME I I.

211... Dans tout triangle sphérique obliquangle ACD (*fig.* 62e.), si d'un angle C on abaisse l'arc CB perpendiculairement sur le côté 62
opposé AD, on aura toujours cette proportion.

II. PRINCIPE.

Le co-sinus du segment AB
est au co-sinus du segment BD,
comme le co-sinus du côté AC
est au co-sinus du côté CD.

FIG. Le triangle CED (*fig.* 60e.) étant le complément de ABC, si l'on fait sur ce triangle complémentaire la première analogie des triangles sphériques rectangles, R : sin. CD : : sin. D : sin. EC, & qu'on en transporte le résultat sur le triangle ABC, on aura cette autre proportion :

R ; co-s. BC : : co-s. AB : co-s. AC.

62 Le triangle obliquangle ACD étant partagé en deux triangles rectangles ABC, CBD, on aura :

$$\left\{ \begin{array}{l} R : \text{co-s. } BC :: \text{co-s. } AB : \text{co-s. } AC \\ R : \text{co-s. } BC :: \text{co-s. } BD : \text{co-s. } CD \end{array} \right\}$$

D'où l'on conclura cette seconde proposition :

co-s. AB : co-s. BD : : co-s. AC : co-s. CD ;

c'est-à-dire, que *dans tout triangle obliquangle, les co-sinus des deux segmens formés par l'arc perpendiculaire, sont entr'eux, comme les co-sinus des deux côtés adjacens.*

THÉORÊME III.

212... En supposant toujours le triangle obliquangle ACD, partagé en deux triangles rectangles, on aura cette proportion.

III. PRINCIPE.

Le sinus de AB
est au sinus de BD,
comme la co-tangente de l'angle A,
est à la co-tangente de l'angle D ;
ou *comme la tangente de l'angle* D,
est à la tangente de l'angle A.

Si l'on applique la seconde analogie des triangles rectangles (204) sur ABC & CBD, qui divisent le triangle obliquangle ACD, l'on aura : FIG. 62

$$\begin{cases} R : \text{sin. } AB :: \text{tang. } A : \text{tang. } BC \\ R : \text{sin. } BD :: \text{tang. } D : \text{tang. } BC \end{cases}$$

Donc :

sin. AB : sin. BD :: tang. D : tang. A,
ou :: co-t A : co-t D ;

c'est-à-dire, que *dans tout triangle sphérique obliquangle, les sinus des deux segmens, formés par l'arc perpendiculaire, sont en raison inverse des tangentes des angles adjacens, ou en raison directe des co-tangentes de ces mêmes angles.*

THÉORÊME IV.

213... Dans tout triangle sphérique obliquangle ACD, si d'un angle C, on abaisse l'arc perpendiculaire CB sur le côté opposé AD (*fig.* 62[e].), ou sur son prolongement (*fig.* 64[e].), on aura cette proportion. 62 64

IV. PRINCIPE.

La tangente de la moitié AD *sur lequel tombe l'arc perpendiculaire,*
est à la tangente de la demi-somme des deux autres côtés,
comme la tangente de leur demi-différence
est à la tangente de la demi-différence, ou de la demi somme des deux segmens AB, BD, selon que l'arc CB tombe en dedans ou en dehors de la figure.

Puiſque nous avons vu dans le ſecond théorême
62 (211) que *les co-ſinus des deux ſegmens d'un triangle ſphérique ſont entr'eux, comme les co-ſinus des côtés adjacens*, nous pouvons dire auſſi (16) que *la ſomme des co-ſinus de ces deux ſegmens eſt à leur différence, comme la ſomme des co-ſinus des deux côtés adjacens eſt auſſi à leur différence.*

Mais par l'article (177) du ſecond lemme, *la ſomme des co-ſinus de deux arcs inégaux eſt à leur différence, comme la co-tangente de leur demi-ſomme eſt à la tangente de leur demi-différence.* Donc, appliquant cette propriété au triangle ACD (*fig.* 62e.), on aura pour les deux côtés AC & CD, co-ſ. AC + co-ſ. CD : co-ſ. AC — co-ſ. CD :: co-t $\frac{AC+CD}{2}$: tang. $\frac{AC-CD}{2}$; & pour les deux ſegmens correſpondants AB, BD, on aura, co-ſ. AB + co-ſ. BD : co-ſ. AB — co-ſ. BD :: co-t. $\frac{AB+BD}{2}$: tang. $\frac{AB-BD}{2}$; or ſelon ce qui a été dit ci-deſſus, on a, co-ſ. AC + co-ſ. CD : co-ſ. AC — co-ſ CD :: co-ſ. AB + co-ſ. BD : co-ſ. AB — co-ſ. BD. Donc, co-t. $\frac{AC+CD}{2}$: tang. $\frac{AC-CD}{2}$ :: co-tang. $\frac{AB+BD}{2}$: tang. $\frac{AB-BD}{2}$.

Si dans cette dernière proportion, après avoir changé la place des moyens, on fait attention que les tangentes ſont réciproquement proportionnelles aux co-tangentes, on en déduira cette

FIG.

nouvelle proportion, qui répond à celle du quatrième principe. Tang. $\frac{AB+BD}{2}$: tangente $\frac{AC+CD}{2}$: : tang. $\frac{AC-CD}{2}$: tang. $\frac{AB-BD}{2}$.
Dans la figure 62e. $\frac{AB+BD}{2}=\frac{AD}{2}$; & dans la figure 64e. $\frac{AB-BD}{2}=\frac{AD}{2}$.

Avant de paſſer aux problêmes qui regardent les triangles ſphériques obliquangles, il eſt important de faire connoître les propriétés du triangle *ſupplémentaire*, dont on ſe ſert dans pluſieurs cas pour faciliter l'application de principes que nous venons d'expoſer.

214... Si des trois angles *a*, *c* & *d* d'un triangle ſphérique *acd*, pris pour centre ou pour poles, on décrit trois arcs de cercle qui forment par leur rencontre le triangle extérieur ACD; par cette conſtruction, chaque angle du triangle *acd* ſera le ſupplément du côté qui lui eſt oppoſé dans le triangle ACD; & réciproquement chaque angle de ce même triangle ACD, ſera le ſupplément du côté qui lui eſt oppoſé dans le triangle intérieur *acd*. C'eſt par cette raiſon, que le triangle extérieur eſt appellé *ſupplémentaire*, par rapport au triangle intérieur, & réciproquement. 65

Lorſque les données d'un problême ne permettront pas de ſe ſervir immédiament des principes que nous avons donnés pour la réſolution

des triangles ſphériques obliquangles, on fera uſage du triangle ſupplémentaire; c'eſt-à-dire, on prendra le ſupplément des données du problême, & alors les côtés devenant des angles & les angles des côtés, l'application des principes poſés deviendra facile; mais il faut bien obſerver que la ſolution obtenue de cette manière ne donne que le ſupplément de la quantité demandée.

215... La réſolution des triangles ſphériques obliquangles ne s'étend qu'à douze cas différens, parmi leſquels il y en a huit qui demandent qu'on réduiſe le triangle donné en deux triangles rectangles, par un arc perpendiculaire abaiſſé d'un de ſes angles ſur le côté oppoſé. Cet arc perpendiculaire CB (*fig.* 62e.) tombe en dedans du triangle ACD, lorſque les deux autres angles A & D, ou leurs côtés oppoſés, ſont de même eſpèce; & il tombe en dehors (*fig.* 64e.), lorſque les deux angles autres A & D, ou leurs côtés oppoſés, ſont de différente eſpèce.

En parcourant ces douze cas, nous ferons voir qu'au moyen du triangle ſupplémentaire, la ſolution des ſix derniers eſt la même que celle des ſix premiers. Nous ſuivrons en cela la méthode de M. *Bezout*, d'autant qu'elle nous a paru la plus ſimple & la plus facile à ſaiſir. Mais pour rapprocher davantage les idées ſur cette matière, nous avons cru qu'il convenoit de comparer ces différentes queſtions deux à deux, en prenant celles dont les données & les inconnues ſe trouvent oppoſées les unes aux autres.

Figure 66.

217. Premier cas.

Etant donnés deux côtés AC, CD, & l'angle A opposé à l'un d'eux, trouver l'angle D opposé à l'autre côté donné.

C'est un des cas les plus simples ; il se résout par l'analogie du premier principe, sin. CD : sin. AC : : sin. A : sin. D.

Ce cas est douteux, lorsque CD est moindre que AC, puisqu'on ne peut déterminer par les données si l'angle D est aigu ou obtus.

II. Cas.

Etant donnés deux côtés AC, CD, & l'angle A opposé à l'un d'eux, trouver le troisième côté AD.

De l'angle C opposé au côté cherché, abaissez l'arc CB perpendiculairement sur AD, ou sur son prolongement ; & dans le triangle rectangle ACB, connoissant AC, l'angle A & l'angle droit B, calculez le segment AB par cette proportion des triangles rectangles, R : co-s. A : : tang. AC : tang. AB. Et pour

Figure 65.

Cas opposé au premier.

Etant donnés deux angles A & D, & le côté CD opposé à l'angle A, trouver le côté AC opposé à l'autre angle.

Sans le secours du triangle supplémentaire, on peut résoudre ce cas par l'analogie du premier principe, sin. A : sin. D : : sin. CD : sin. AC.

Ce cas opposé est aussi douteux, puisque le côté AC peut être plus petit ou plus grand que 90°.

Cas opposé au II.

Etant donnés deux angles *a* & *d*, & le côté *cd* opposé à l'angle *a*, trouver le troisième angle *c*.

Dans le triangle ACD, prenez les supplémens des trois données du problême ; & connoissant dans ce triangle supplémentaire les deux côtés CD, CA, supplémens des angles *a* & *d*, plus l'angle A, supplément du côté *cd*, il sera facile de trouver le troisième côté AD, supplément de l'angle *c* demandé.

Figure 66.

avoir l'autre egment BD, servez-vous de l'analogie du second principe des triangles obliquangles, co-sinus AC : co-f. CD : : co-f. AB : co-f. BD.

Si CB tombe en dedans du triangle, le côté cherché AD sera égal à AB+BD; & si l'arc CB tombe en dehors, AD sera égal à AB —BD.

III. *Cas.*

Etant donnés les deux angles A & D, avec le côté AC, opposé à l'un d'eux, trouver le côté intercepté AD.

Après avoir abaissé l'arc CB, cherchez le segment AB par la proportion, R : co-f. A : : tang. AC : tang. AB.

Et pour avoir l'autre segment, appliquez l'ana-

Figure 65.

De l'angle C, opposé au côté cherché, abaissez l'arc CB, & cherchez le segment AB par cette proportion, R : co-f. A : : tang. AC : tang. AB.

Pour avoir l'autre segment BD, calculez le quatrième terme de celle-ci, co-f. AC : co-f. CD : : co-f. AB : co f. BD.

Si l'arc CB tombe en dedans ou en dehors du triangle, on se conduira exactement comme dans le cas opposé à celui-ci; mais puisqu'on s'est servi du triangle supplémentaire, le côté trouvé AD n'est que le supplément de l'angle *c* demandé.

Cas opposé au III.

Etant donnés les deux côtés *cd*, *ac*, avec l'angle *a* opposé au côté *cd*, trouver l'angle *c* compris entre les deux côtés connus.

Prenez dans le triangle ADC le supplément des trois choses données, & alors connoissant les angles A & D, avec le côté opposé CD, déterminez le côté AD, compris entre

Figure 66.

logie du troisième principe, co-t. A : co-t. D : : sin. AB : sin. BD.

IV. *Cas.*

Etant donnés deux côtés AC, AD, & l'angle A compris entre ces deux côtés, trouver le troisième côté CD.

De l'angle C, abaissez l'arc perpendiculaire CB ; & après avoir trouvé le segment AB, par cette proportion, la même que dans le cas précédent, R : co-s. A : : tang. AC : tang. AB.

Retranchez-le du côté AD, si vous avez la figure 62, ou ajoutez-le à ce côté, si vous avez la figure 64, & vous aurez le segment BD ; alors pour trouver le côté CD, faites cette proportion, co-s. AB : co-s. BD : : co-s. AC : co-s. CD.

V. *Cas.*

Etant donnés deux côtés AC, AD, & l'angle A

Figure 65.

les deux angles donnés, par ces deux proportions ; R : co-s. A : : t. AC : t. AB co-t. A : co-t. D : : sin. AB : sin. BD.

Prenez ensuite le supplément du côté AD, & vous aurez la valeur de l'angle *c* demandé.

Cas opposé au IV.

Etant donnés deux angles *d* & *c*, & le côté *cd* compris, trouver le troisième angle *a*.

Prenez dans le triangle ACD le supplément des trois choses données ; & alors connoissant les deux côtés AC, AD & l'angle A compris, déterminez le troisième côté CD par ces deux analogies, en se conformant à ce qui a été prescrit dans le cas opposé. R : co-s. A : t. AC : t. AB ; co-s. AB : co-s. BD : : co-s. AC : co-s. CD.

Prenez le supplément de CD, & vous aurez l'angle *a* demandé.

Cas opposé au V.

Etant donnés deux angles *d* & *c*, avec le côté

Figure 66.

compris, trouver l'angle D.

Cherchez le ſegment AB, comme ci-deſſus, R : co-ſ. A : : tang. AC : tang. AB, & conduiſez-vous de la manière enſeignée, ſelon que vous calculez le triangle de la figure 62, ou celui de la figure 64.

Enſuite pour avoir l'angle D, connoiſſant les deux ſegmens AB, BD, cherchez le quatrième terme de cette proportion, ſin AB. : ſin. BD : : co-t. A : co-t. D.

Figure 65.

compris, trouver le côté *ac* oppoſé à l'angle *d*.

Prenez le ſupplément des trois choſes données; & dans le triangle ACD, connoiſſant les deux côtés AC, AD, & l'angle A compris, déterminez l'angle D oppoſé au côté AC.

On trouvera le ſegment AB par cette proportion, R : co-ſ. A : : tang. AC : tang. AB.

Connoiſſant les deux ſegmens AB, BD, pour trouver l'angle D, on fera celle-ci, ſin. AB : ſin BD : : co-t. A : co-t. D.

Et le ſupplément de l'angle D ſera la valeur du côté *ac* demandé.

VI. *Cas.*

Etant donnés les trois côtés AC, AD, CD, trouver un angle quelconque; par exemple, l'angle A.

Abaiſſez de l'angle C l'arc perpendiculaire CB ſur le côté AD adjacent à l'angle demandé; & connoiſſant la ſomme, & par conſéquent la demi-ſomme des deux ſegmens AB, BD, cherchez leur demi-diffé-

Cas oppoſé au VI.

Etant donnés les trois angles *a*, *c*, *d*, trouver un côté quelconque; par exemple, le côté *cd*.

Prenez le ſupplément des trois angles donnés; & dans le triangle ſupplémentaire ACD, connoiſſant les trois côtés AC, AD, CD, il ne s'agira plus que de calculer l'angle A, ſupplément de *cd*.

Ayant abaiſſé, comme

Figure 66.

rence par l'analogie du quatrième principe.

$$\text{Tang.}\ \frac{AD}{2} : \text{t.}\ \frac{AC+CD}{2} :: \text{t.}\frac{AC-CD}{2} : \text{t.}\frac{AB-BD}{2}.$$

Ajoutez cette demi-différence à la moitié de AD, & vous aurez le plus grand ſegment AB ; alors pour trouver l'angle A demandé, faites cette proportion :

Tang. AC : tang. AB :: R : co-ſ. A.

Si l'arc perpendiculaire tombe hors du triangle, comme dans la figure 64, le quatrième terme de la première analogie donne la demi-ſomme des deux ſegmens, au lieu de la demi-différence, qui eſt alors connue par l'état de la queſtion.

218. Ce problême ſe réſout encore d'une autre manière que nous allons expoſer ; c'eſt même celle que l'on ſuit ordinairement.

De la demi-ſomme des trois côtés donnés, retranchez ſucceſſivement chacun des deux côtés qui comprennent l'angle cher-

Figure 65.

dans le cas oppoſé, l'arc AB ſur le côté AD adjacent à l'angle demandé, calculez le quatrième terme de cette proportion :

$$\text{Tang.}\ \frac{AD}{2} : \text{t.}\ \frac{AC+CD}{2} :: \text{t.}\ \frac{AC-CD}{2} : \text{t.}\ \frac{AB-BD}{2}.$$

Ajoutez cette demi-différence à la moitié de AD, & vous aurez le plus grand ſegment AB.

Pour avoir l'angle A, on cherchera le quatrième terme de celle-ci :

Tang. AC : tang. AB :: R : co-ſ. A.

Après s'être conformé à ce qui eſt preſcrit dans le cas oppoſé pour le triangle de la figure 62, ou de la figure 64, on prendra le ſupplément de l'angle A, & on aura la valeur préciſe du côté *cd* demandé.

On peut encore réſoudre ce problême de cette manière, qui paroît plus commode dans la pratique ; & au lieu du quarré du rayon, nous nous ſervirons du complément arithmétique des logarithmes ſinus des deux côtés, qui comprennent l'angle cherché. Cette

Figure 66.

ché ; ce qui vous donnera deux reſtes.

Alors au double du logarithme du rayon, ajoutez les logarithmes ſinus de ces deux reſtes, & du total retranchez la ſomme des logarithmes ſinus des deux côtés qui comprennent l'angle cherché.

Le reſte ſera le logarithme du quarré du ſinus de la moitié de cet angle. Prenez la moitié de ce logarithme reſtant ; cherchez ſa valeur dans les tables, & l'ayant trouvée, doublez-la ; ce ſera la valeur de l'angle demandé.

Cette pratique eſt fondée ſur cette analogie :

Le produit des ſinus des deux côtés qui comprennent l'angle cherché,
Eſt au produit des ſinus des deux excès de la demi-ſomme des trois côtés ſur chacun de ces deux côtés,
Comme le quarré du rayon
Eſt au quarré du ſinus de la moitié de l'angle cherché.

Figure 65.

méthode eſt abſolument la même que celle du cas oppoſé.

De la demi-ſomme des trois côtés donnés, retranchez ſucceſſivement chacun des deux côtés qui comprennent l'angle cherché, ce qui donnera deux reſtes.

Ajoutez enſemble les logarithmes ſinus de ces deux reſtes, & les complémens arithmétiques des ſinus des deux côtés qui comprennent l'angle cherché ; prenez la moitié de la ſomme, elle ſera le logarithme ſinus de la moitié de l'angle cherché. Doublez ſa valeur, prenez-en le ſupplément, & vous aurez le côté cherché.



SECONDE SECTION.

De la figure de la Terre.

219. Dès observations très-simples & très-faciles à faire dûrent apprendre aux hommes que la Terre étoit ronde, & qu'on pouvoit regarder sa circonférence comme celle de tout cercle, divisible en un nombre quelconque de parties égales. Cette vérité n'avoit pas échappé aux premiers observateurs : elle avoit été reconnue sur-tout des Chaldéens & des Egyptiens; & quoiqu'elle fût du petit nombre de celles qu'ils avoient enseignées, elle n'a pas moins resté, long-tems après eux, ensévelie dans un profond oubli. Leurs descendans, en proie à l'ignorance & à la superstition, furent frappés d'un tel aveuglement, que, dès le cinquième siècle de notre Ere, l'opinion que la Terre étoit un globe, paroissoit une absurdité monstrueuse aux Philosophes de ce tems ; & dans le treizième siècle, ce fut une impiété. Pour dissiper une erreur si grossière, il suffisoit seulement d'ouvrir les yeux sur cette foule de phénomènes qui nous environnent.

En effet, un voyageur, à mesure qu'il avance dans sa route, s'apperçoit aisément que les objets dont il s'éloigne, disparoissent peu-à-peu; & que de nouveaux viennent successivement s'offrir à sa vue. Ce changement d'aspect ne vient pas seulement de ce que sa vue est trop foible

pour diſtinguer les objets les plus éloignés, puiſque avec les meilleures lunettes ſouvent il n'y parviendroit pas ; il vient encore de ce que la courbure de la Terre, qui s'élève entre lui & ces mêmes objets, lui en dérobe la vue, en interceptant les rayons de lumière qui les lui rendoient auparavant ſenſibles.

Ce qui ſe paſſe ſur terre a lieu également en pleine mer. Lorſqu'un vaiſſeau commence à découvrir la terre, il n'apperçoit d'abord que les objets les plus élevés, comme le ſommet des montagnes ou la pointe des clochers. Ce n'eſt qu'à meſure qu'il s'approche davantage de la côte, qu'il découvre les objets moins élevés ; & enfin tout le terrein adjacent. Si la ſurface de la Terre étoit plane, lorſqu'il apperçoit le haut d'une tour, par exemple, il en découvriroit en même tems le pied ; mais il n'en eſt pas ainſi, parce que la ſurface de la mer s'abaiſſe de plus en plus à l'égard de la ligne horiſontale du vaiſſeau.

Ce qui nous prouve encore d'une manière bien ſenſible cette courbure de la Terre, c'eſt ce que nous obſervons dans les éclipſes de Lune. Pendant ces phénomènes, nous voyons l'ombre de la Terre projetée en forme de cercle ſur le diſque lunaire, & cette ombre nous paroît exactement ronde, malgré les différentes poſitions du Soleil par rapport à nous, & quel que ſoit le lieu de la Terre où nous l'obſervions. Or il n'y a qu'un globe ou un corps ſphérique dont l'ombre puiſſe être circulaire, malgré ſes diffé-

rentes poſitions par rapport au corps lumineux : donc la Terre eſt ſphérique , ou à-peu-près ſphérique.

220... Enfin, ſi après toutes ces preuves, on pouvoit encore élever quelque doute ſur une vérité ſi généralement reconnue, la *gravitation* ſuffiroit ſeule aujourd'hui pour nous en convaincre. On appelle en général *gravitation* ou *peſanteur*, cette force en vertu de laquelle toutes les parties de la matière tendent à s'approcher les unes des autres. C'eſt cette même force que nous éprouvons à chaque inſtant ſur la Terre, & par laquelle tous les corps qui ſont à ſa ſurface, y retombent auſſi-tôt qu'on les en éloigne. Cette force réſide non-ſeulement à la ſurface des corps, mais encore dans toutes les particules de matière dont ils ſont compoſés. La Terre n'a pris, dès ſa formation, la figure ſphérique, que par l'effort mutuel qu'ont fait toutes ſes différentes parties à raiſon de leur denſité, pour s'approcher du centre commun de gravité, autour duquel elles ſe ſont diſpoſées de manière à peſer les unes ſur les autres, & à ſe mettre dans un parfait équilibre. Par cet arrangement les eaux de la mer, comme plus légères, ſe ſont trouvées occuper la plus grande partie de la ſurface du globe. Leur équilibre & leur courbure même extérieure ne dépend donc que de l'action continuelle que chaque colonne d'eau exerce ſur le fond qui la retient, de manière que la direction de cette force ſoit perpendiculaire à la ſurface. Sans cet équilibre, comment l'Océan

n'auroit-il pas déja franchi ses limites, & inondé les continens qui l'environnent ?

C'étoit là le sentiment du modeste *Roberval* (1). Ce savant, dans un Ouvrage qu'il publia en 1644, sur le systême du monde, attribue à toutes les parties de matière dont l'univers est composé, la propriété de tendre les unes vers les autres; c'est pour cela, dit-il, qu'elles se disposent sphériquement, non par la vertu du centre, mais par leur attraction mutuelle, & pour se mettre en équilibre les unes avec les autres. (Voy. l'*Abrégé d'Astr. de M.* de Lalande, page 448.)

Si la pesanteur est une qualité inhérente à la matière, elle doit donc s'étendre à l'infini dans l'espace; de sorte que ce que nous avons dit de la Terre, doit s'appliquer également à toutes les planètes. En effet leur figure sphérique annonce d'abord que le même agent qui a disposé de celle de la Terre, a présidé aussi à leur formation; qu'il pénètre intimément leur substance; qu'il affecte leur centre & leurs parties internes

(1) *Roberval*, Professeur de Mathématiques au Collège Royal de Paris, Géomètre aussi savant que modeste, étoit contemporain & antagoniste de *Descartes*. Le Livre qu'il publia en 1644, étoit intitulé, *Aristarchi Samii de Mundi systemate liber*, & avoit pour principe fondamental l'attraction générale. *Descartes*, dont la doctrine étoit alors suivie dans toutes les écoles, n'eut pas de peine à écraser son antogoniste par son crédit & sa grande réputation. Le mérite de *Roberval* ne fut reconnu qu'après la publication du fameux Livre des Principes de *Newton*, en 1687.

avec

avec la même force que les externes ; que son action, qui ne peut être altérée par aucun corps interposé ou par aucun obstacle quelconque, se propage à l'infini dans l'espace. Le mouvement circulaire de tous les corps célestes autour d'un point principal, est une preuve bien manifeste de son existence & de son universalité.

221... *Newton* a fait voir le premier que la pesanteur que les corps exercent dans l'étendue de la sphère de leur activité, est toujours proportionnelle à leur masse ; mais qu'en se propageant, elle diminue dans le même rapport que le quarré de la distance augmente ; en sorte qu'un corps, par exemple, qui s'éloigneroit de trois lieues d'un autre corps, n'attireroit & ne seroit attiré qu'avec une force neuf fois moindre que celle qu'il exerçoit & qu'il éprouvoit auparavant.

C'est en vertu de cette loi que toutes les planètes, & par conséquent la Terre, tournent autour du Soleil comme centre de gravité de notre systême planétaire ; que la Lune tourne ou gravite autour de notre globe, & que les satellites de Jupiter & de Saturne se meuvent autour de leur planète principale.

222... Si le globe terrestre n'avoit reçu, dès le commencement, qu'un mouvement de translation autour du Soleil, à cause de la gravitation égale de toutes ses parties les unes vers les autres, sa figure seroit restée parfaitement sphérique ; mais cette planète ayant reçu en même tems l'impres-

sion d'un autre mouvement (1) qui la fait tourner sur son axe dans l'espace de 24 heures (2), toutes ses différentes parties, en vertu de ce mouvement de rotation, ont acquis une force centrifuge, d'autant plus grande, qu'elles sont plus éloignées de cet axe de rotation. Cette force, opposée à la pesanteur, a altéré leur forme primitive, & l'a changée en celle d'un sphéroïde applati vers les poles (3). C'est ce que nous apprennent toutes

---

(1) Dans l'*Abrégé d'Astr.* par M. de Lalande, p. 419, on lit que *Jean Bernouilli*, dans un Mémoire de Dynamique où il considère les centres spontanés de rotation, fait voir qu'une force de projection appliquée, non pas au centre de la Terre, mais un peu plus loin du Soleil, & cela de $\frac{1}{150}$ du rayon (c'est-à-dire à dix lieues du centre de la Terre), donneroit à la Terre, supposée ronde & homogène, deux mouvemens assez conformes à ceux que l'on observe, (*Bern. opera*, t. IV, p. 283.).

(2) Suivant M. *de Lalande*, la vîtesse de la rotation diurne de la Terre est de 238 toises par seconde de tems, à-peu-près comme la vîtesse d'un boulet de canon, (*Abrégé d'Astr.* page 349.).

(3) *Newton* a trouvé que l'applatissement de la Terre étoit égal à $\frac{1}{230}$, ce qui donne environ 13 lieues; mais il supposoit que la Terre étoit par-tout homogène; c'est-à-dire, d'égale densité dans toutes ses couches, ce qui n'est pas vraisemblable. Après avoir mesuré plusieurs degrés terrestres à différentes latitudes, & pris un milieu entre toutes ces mesures, on a trouvé depuis que l'applatissement étoit de $\frac{1}{321}$, ce qui donne moins que *Newton* n'avoit trouvé. Malgré cela, on ne peut pas encore prononcer définitivement là-dessus, parce qu'on n'a pas un assez grand nombre d'expériences & d'observations, sur-tout sur la longueur du pendule à différentes latitudes. La longueur du pendule est sans contredit plus propre

FIG.

les expériences du pendule, & les mesures de différens degrés terrestres dont nous ferons mention dans peu. Néanmoins, comme cette différence est peu sensible, on peut se dispenser d'y avoir égard dans les objets que nous avons à traiter, & continuer de regarder la Terre comme un corps sphérique. 67

223... Si l'on se représente maintenant le globe terrestre AB situé dans l'espace, de manière que chaque point de sa surface réponde exactement sous un point déterminé de celle des cieux, un observateur placé en A, par exemple, verra autour de lui un cercle terminateur, dont le plan tangeant à la surface de la Terre, sépare la partie visible du ciel de celle qui ne l'est pas. Ce cercle HAR sera l'*horison sensible* du lieu A. Si l'on suppose un autre observateur en B, diamétralement opposé au premier, celui-ci ne verra également que la partie du ciel, qui, par rapport à lui, est au-dessus du plan HBR, lequel est l'*horison sensible* du lieu B. Entre ces deux horisons, il y a bien un espace égal au diamètre AB de la Terre, qui ne peut être vu ni du point A ni du point B, du moins en supposant l'œil de l'observateur à la surface; mais la distance de la terre au ciel ou aux étoiles est si prodigieuse, en comparaison du diamètre AB,

---

que les mesures des degrés terrestres, à faire connoître la figure de la Terre; aussi les Astronomes qui sont partis avec M. *de la Peyrouse*, doivent-ils s'occuper essentiellement de cet objet.

FIG. qu'on peut regarder le globe terrestre comme un point dans l'espace; & par conséquent les deux
67 horisons comme un seul & même plan EF, passant par le centre T de la Terre, & que pour cette raison on nomme *horison rationnel*, le seul qui soit en usage.

224. L'horison sensible ne diffère de l'horison rationnel auquel il est parallèle, que par rapport aux objets qui nous environnent sur la Terre; mais quand il s'agit des astres, ils ne sont tous deux qu'un seul & même horison.

Nous ne ferons mention de l'horison sensible que pour déterminer à quelle distance on peut porter sa vue en pleine mer, lorsqu'on est élevé d'une certaine quantité au-dessus de son niveau, & pour connoître son inclinaison à l'égard de la ligne horisontale du vaisseau, afin d'en tenir compte dans toutes les observations faites à la mer.

La ligne droite ZN, qu'on peut imaginer perpendiculaire au plan du cercle EF, & passer par son centre, s'appelle l'*axe* de l'horison. (Cette ligne est représentée par le fil à plomb des instrumens à l'usage des Astronomes.) Les points Z & N, où cette droite prolongée rencontre la sphère céleste, sont les poles de l'horison; celui qui est le plus élevé au-dessus de la tête d'un observateur, se nomme *zénit*: (c'est un des points les plus essentiels à l'Astronome & au Marin;) & celui qui répond à ses pieds, s'appelle *nadir*. Ainsi Z est le zénit de l'observateur placé en A, & N est

son nadir. C'est le contraire pour l'observateur FIG.
placé en B.

225. Mais comme tout est en mouvement dans la nature ; que la Terre & les astres se meuvent autour d'un point dans cet espace immense, il est essentiel d'examiner d'abord les propriétés qui résultent du mouvement de la Terre, & les apparences que celui des astres peut offrir aux yeux d'un observateur immobile sur la surface du globe.

Si l'on imagine que le globe terrestre PEPQ tourne (1) uniformément autour de l'un de ses diamètres PP, qu'on appelle l'*axe* de la Terre, il est évident, 68

1°. Que chaque point de sa surface décrit un cercle, dont le plan est perpendiculaire à l'axe de la Terre.

2°. Que le point E, également éloigné des deux extrémités PP de cet axe, qu'on nomme ses *poles*, décrit le plus grand cercle. Ce cercle EQ s'appelle l'*équateur*, parce qu'il partage le globe en deux parties égales, qu'on nomme *hémisphères*, ou parce que, quand le soleil répond au plan de ce cercle, les jours sont par tout égaux aux nuits sur la surface de la Terre. Ce cercle & son axe, prolongés jusqu'au ciel, répondent à l'équateur céleste & à l'axe du monde.

---

(1) La première expérience qui prouva démonstrativement, dit M. *de Lalande*, que la Terre tournoit sur son axe, fut celle du pendule faite par M. *Richer* à l'île de Cayenne, en 1672.

FIG. L'hémiſphère terreſtre dans lequel nous ſommes ſitués, s'appelle hémiſphère *boréal*, *ſeptentrional* ou *arctique* ; & l'autre ſe nomme hémiſphère *auſtral*, *méridional* ou *antarctique*.

68 Les poles ſitués dans ces deux hémiſphères prennent exactement les mêmes dénominations ; ou bien on nomme ſimplement *Nord*, celui qui eſt dans l'hémiſphère ſeptentrional ; & on appelle *Sud*, celui qui répond à l'hémiſphère méridional. Ils reçoivent ces différens noms des poles céleſtes auxquels ils répondent, ou des vents qui ſoufflent des points correſpondans de l'horiſon.

3°. Que les cercles décrits par différens points de la ſurface du globe, durant ſa révolution ſur ſon axe, ſont d'autant plus petits, qu'ils ſont plus éloignés de l'équateur, ou plus voiſins des poles. Ces cercles, qui ſont parallèles à l'équateur, ſe nomment ſimplement des *parallèles*. Si S, par exemple, marque la ſituation de Paris ſur la Terre, le cercle SBD, qui eſt la trace que décrit cette Ville pendant une révolution du globe ſur ſon axe, s'appelle le *parallèle* de Paris.

4°. Que ſi la Terre tourne d'Occident en Orient, comme le prouvent toutes les obſervations, un obſervateur ſitué en quelque lieu que ce ſoit, doit voir les aſtres tourner en ſens contraires, avec cette différence que ceux qui ſont voiſins de l'équateur céleſte, lui paroîtront ſe mouvoir beaucoup plus vîte que ceux qui ſont près des poles.

Quoique le sens dans lequel se fait le mouvement de la Terre soit de l'Ouest à l'Est, néanmoins pour nous conformer à l'usage reçu, qui n'existe que dans la manière de s'énoncer sur cet objet, nous nous exprimerons à l'avenir comme si le soleil & tous les astres tournoient réellement autour de la Terre de l'Est à l'Ouest. FIG. 68

226... Puisque la figure de la Terre est ronde, & qu'on ne peut faire un pas sans changer d'horison, & sans répondre par conséquent à un point du ciel différent de celui auquel on répondoit auparavant, l'horison de chaque lieu, compris entre l'un & l'autre pole, doit donc être nécessairement perpendiculaire ou incliné au plan de l'équateur. Ces deux grands cercles doivent donc se couper en deux parties égales, & leurs circonférences en deux points diamétralement opposés : c'est à ces deux points d'intersection, qu'on nomme les vrais points d'*Est* & d'*Ouest*, qu'un astre, qui décrit l'équateur, se lève & se couche pour quelque peuple de la Terre que ce soit.

227... Les premiers Astronomes ayant examiné attentivement les points du lever & du coucher du soleil, imaginèrent de partager la durée de sa révolution diurne en deux parties égales, par un grand cercle qui, passant par le *zénit* & le *nadir*, & par les poles du monde, fût perpendiculaire à l'horison & à l'équateur. Ils appellèrent ce cercle, le *Méridien céleste* ; & celui qui lui correspond sur la Terre, *Méridien terrestre*, parce que, divisant tous les parallèles

FIG. en deux parties égales, il partage auſſi en deux parties égales la durée de l'apparition d'un aſtre ſur l'horiſon.

68 En effet, ſi-tôt que le ſoleil paroît ſur l'horiſon, nous le voyons s'élever par degrés en décrivant ſenſiblement un parallèle à l'équateur. Parvenu au plus haut de ſa courſe, il eſt alors dans le plan du méridien, & c'eſt l'inſtant où il paſſe par ce cercle, qu'on nomme *Midi*; c'eſt-à-dire, milieu du jour. Il deſcend enſuite vers le couchant avec la même vîteſſe, & à peu-près dans le même tems qu'il avoit mis à s'élever juſqu'au méridien.

228... C'eſt par l'intervalle de tems entre le paſſage & le retour du ſoleil à ce même cercle, qu'on meſure la durée totale du jour, laquelle on eſt convenu de partager en vingt-quatre heures ou parties égales. Les Aſtronomes comptent ces vingt-quatre heures de ſuite d'un midi à l'autre; mais dans l'uſage ordinaire ou de la vie civile, on les partage en deux douzaines, dont l'une ſe compte depuis midi, juſqu'à douze heures après, ou minuit; & l'autre, depuis cet inſtant, juſqu'à midi du lendemain. On les diſtingue en heures du matin & en heures du ſoir. Le jour aſtronomique commence donc & finit à midi précis, tandis que le jour civil ne commmence & ne finit qu'à minuit; de ſorte qu'il y a toujours douze heures du jour civil d'écoulées, lorſque le jour aſtronomique commence. Par exemple, le 15 Janvier, à neuf heures du matin, *tems civil*, revient au 14 Janvier, à vingt-une heures, *tems*

astronomique. Il est toujours fort aisé de réduire FIG.
une de ces manières de compter à l'autre. Les Marins se servent du tems astronomique, parce 68
qu'ils règlent toutes leurs opérations d'un midi à l'autre.

229... On voit donc, par ce qui précède, que tous les lieux situés sur un même méridien terrestre, doivent compter midi au même instant, & qu'il en est de même d'une autre heure quelconque du jour ou de la nuit.

230... Si par les poles ou par l'axe PP de la Terre, on fait passer tant d'autres cercles qu'on voudra, tels que PEPQ, tous ces cercles tracés sur sa surface, seront autant de méridiens auxquels le soleil répondra successivement pendant la durée du jour; d'où l'on voit que lorsqu'il sera midi pour ceux qui sont sur le méridien terrestre PAP, il sera plus de midi pour ceux qui se trouveront situés à l'Orient sur le méridien PIP, parce que le soleil aura déja passé au méridien de ceux-ci; & au contraire il ne sera pas encore midi pour ceux qui sont situés à l'Ouest sur le méridien PEP.

231... Le soleil, en faisant le tour de la Terre dans l'espace de vingt-quatre heures, éclaire donc successivement les différents points de sa surface ou les 360°. de sa circonférence, ce qui répond précisement à 15°. par heure; c'est-à-dire, qu'à toute heure du jour, il répond à des méridiens terrestres, qui font entr'eux, en se coupant aux poles, des angles de 15°. Donc réciproquement si deux méridiens sont éloignés

FIG. de 15, de 30 ou de 45 degrés ; c'est-à-dire, si l'arc de l'équateur compris entre deux méridiens, est de 15, de 30 ou de 45 degrés, les peuples, situés sur ces méridiens, auront midi une, deux
68 ou trois heures plus tôt ou plus tard, selon la situation orientale ou occidentale d'un de ces méridiens par rapport à l'autre. Ceux qui seront éloignés de 180°. à l'Ouest d'un certain méridien, compteront minuit, par exemple, lorsqu'il sera midi sur le méridien d'où ils commencent à compter.

232... On voit par là que si deux Navigateurs partoient en même tems d'un même port, pour faire le tour de la Terre en sens contraire, l'un de l'Est à l'Ouest, & l'autre de l'Ouest à l'Est, étant revenus tous deux au lieu du départ, le premier compteroit un jour de plus, & le second un jour de moins que les habitans de ce lieu. Donc, par la même raison, puisque les éclipses sont des phénomènes qui peuvent être apperçus de différens lieux de la Terre au même instant, si l'on observe à Paris une éclipse de soleil à huit heures précises du matin, & que cette éclipse ait été observée à Toulon le même jour à huit heures, 14′ 26″, & à Brest à sept heures 32′ 36″, on conclura d'abord que Toulon est a l'Orient de Paris, puisqu'au même instant on y compte plus qu'à Paris ; & que Brest est situé à l'Occident, puisqu'on y compte moins ; & la différence des tems, réduite en degrés, à raison d'une heure par quinze degrés, fera connoître que le méridien de Toulon est à l'Orient de celui

de Paris de $3^{o}. 36' 30''$, & que celui de Breſt eſt à l'Occident de $6^{o}. 51'$. FIG.

Nous donnerons ci-après la méthode de réduire le tems en parties de l'équateur, & réciproquement. 68

233... C'eſt donc par la différence des tems que l'on compte au même inſtant en divers lieux de la Terre, qu'on peut déterminer la différence des méridiens de ces lieux, & par conſequent leur poſition orientale ou occidentale par rapport à un autre lieu déterminé, & pris pour terme de comparaiſon. On eſt convenu d'appeller *premier méridien*, celui qui paſſe par ce lieu déterminé, & pris arbitrairement ſur la ſurface du globe; & on nomme *longitude* d'un lieu quelconque la diſtance qu'il y a du premier méridien au méridien de ce lieu. Cette diſtance ſe meſure ſur la circonférence de l'équateur. Si PLP repréſente le premier méridien, la longitude du lieu L, par exemple, ſera le nombre de degrés de l'arc AE de l'équateur.

234... On a été long-tems dans l'uſage de compter de ſuite les 360°. de longitude dans le ſens de l'Oueſt à l'Eſt, tout autour du globe. Cet uſage ſe pratique même encore; cependant la plupart des Géographes & Hydrographes François comptent aujourd'hui les longitudes terreſtres de part & d'autre du premier méridien, depuis zero, juſqu'à 180°., & diſtinguent par conſéquent deux ſortes de longitudes, l'une *orientale* & l'autre *occidentale*. Cela eſt abſolument indifférent, pourvu que l'on s'entende.

FIG.

235... D'après une Ordonnance de Louis XIII, en 1634, les François faisoient passer leur premier méridien par l'île de Fer, la plus occidentale des Canaries; mais aujourd'hui, à en juger
68 par la plupart des Cartes géographiques & hydrographiques, il semble qu'ils préfèrent généralement de prendre, pour premier méridien, celui qui passe par l'Observatoire Royal de Paris; d'ailleurs c'est sur ce méridien que sont construites toutes les tables astronomiques dont ils font usage dans la navigation. Les Anglois ont fixé leur premier méridien à Londres, les Espagnols à Madrid, les Italiens à Rome, les Hollandois à Amsterdam, &c. Enfin chaque Nation maritime a adopté aujourd'hui pour premier méridien, celui qui passe par la capitale de son pays. On sent aisément que cette différence des méridiens ne nuit en rien au calcul des longitudes; elle n'est pour chaque peuple maritime qu'une manière plus naturelle & plus commode de rapporter à son pays les distances orientales ou occidentales.

236... Quoique la longitude nous donne la position orientale ou occidentale des différens lieux de la Terre, cette connoissance ne suffit pas encore pour déterminer la place qu'ils doivent occuper sur la surface du globe; car puisque tous les lieux qui sont situés sur un même méridien, ont même degré de longitude, quoique plus ou moins éloignés de l'équateur, il est clair que, connoissant la longitude d'un lieu quelconque L, on saura bien sur quel méridien ce lieu est situé; mais on ne pourra pas assigner quelle est sa place

ſur ce même méridien, ſi l'on ne ſait pas encore FIG.
à quelle diſtance il eſt de l'équateur, ou de combien de degrés eſt l'arc AL du méridien compris entre ce lieu & l'équateur : c'eſt cette diſtance qu'on nomme *latitude* du lieu L. 68

237... La *latitude* d'un lieu quelconque eſt donc le nombre de degrés de l'arc du méridien compris entre ce lieu & l'équateur. Ce nombre de degrés ſe compte ſur le méridien, à partir de l'équateur vers l'un ou l'autre pole ; d'où il ſuit ;

1°. Qu'il y a deux latitudes, l'une *ſeptentrionale*, & l'autre *méridionale*, ſelon que le lieu dont il s'agit eſt dans l'hémiſphère ſeptentrional ou méridional.

2°. Que puiſque les parallèles ont tous les points de leur circonférence à égale diſtance de l'équateur, tous les lieux, ſitués ſur un même parallèle, doivent avoir la même latitude.

C'eſt par l'obſervation des aſtres que les Aſtronomes & les Marins déterminent la latitude & la longitude des différens lieux de la terre & de la mer, comme nous le verrons en ſon lieu.

Concluons donc de ce qui vient d'être dit, que la poſition d'un lieu ſur la ſurface de la Terre eſt entièrement déterminée, lorſqu'on connoît ſa longitude & ſa latitude.

Réduction des Degrés de l'Equateur en tems & du tems en degrés.

La longitude terreſtre ne ſe compte pas ſeu-

FIG. lement en degrés, elle se compte aussi en heures, comme nous venons de le voir ; il faut donc
68 qu'un pilote soit en état de trouver sur le champ la correspondance de ces deux manières de compter, qu'on emploie très-souvent dans les calculs du pilotage, & qu'il en connoisse le rapport.

238... Lorsqu'il s'agit de convertir les degrés en tems, il faut se rappeller que le soleil, dans sa révolution diurne, parcourt les 360°. de la circonférence de la Terre dans l'espace de vingt-quatre heures : donc chaque 15°. répondent à une heure.

c'est-à-dire,
- 15°. de long.... = 60'. de tems.
- 1°. .... = 4'. de tems.
- 1' .... = 4''. de tems.
- 1'' .... = 4'''. de tems.

D'où il suit que pour réduire les degrés & parties de degré en tems, il faut quadrupler le tout, & compter les degrés, minutes & secondes de ce produit, pour des minutes, secondes & tierces d'heure.

EXEMPLE.

Pour réduire en tems.... 24°. 52' 36'' de long.
Il faut multiplier le tout par..... 4
& on a en tems... 1 h. 39' 30'' 24'''

239... Veut-on au contraire réduire le tems en degrés de longitude, on observera que puis-

que une heure ou 60′ répondent à 15°. de longitude, FIG.

{ 1′ de tems répondra à 15′ ou $\frac{1}{4}$ de degré.
1″ de tems . . . . . à 15″ ou $\frac{1}{4}$ de min. de deg. 68
1‴ de tems . . . . . à 15‴ ou $\frac{1}{4}$ de sec. de deg.

Ainsi de suite.

Donc pour convertir les heures, minutes, &c. en degrés & parties de degrés, il faut réduire les heures & minutes tout en minutes; puis compter les minutes, secondes & tierces de tems pour des degrés, minutes & secondes de degré; le quart de tout sera le nombre de degrés & parties de degrés demandés.

EXEMPLE.

Pour réduire en degrés de longitude 3 h. 9′ 11″, il faut multiplier les heures par 60, en y ajoutant les minutes, & on aura 189′ 11″, qu'on prendra pour 189°. 11′, dont le $\frac{1}{4}$ donnera 47°. 17′ 45″ de longitude.

Pour éviter la peine de faire ces réductions, on trouvera, à la fin de cet Ouvrage, deux tables; l'une pour réduire en tems les degrés & parties de degré de longitude ou de l'équateur, & l'autre pour réduire le tems en degrés & parties de degré de l'équateur.

Réduire l'heure qu'il est sur le Méridien où l'on est, à celle que l'on doit compter au même instant sur un autre Méridien connu.

240. Puisque les tables des mouvemens

FIG. céleftes dont on fait ufage dans la Marine, font calculées pour le méridien de Paris, il faut qu'un pilote qui veut s'en fervir, fache réduire l'heure
68 qu'il eft fur fon navire, à celle que l'on compte au même inftant à Paris. Rien n'eft plus facile que cette réduction; il fuffit feulement de faire attention fi l'on compte au même inftant fur le navire plus ou moins qu'à Paris, ce qui dépend de la route qu'on a tenue par rapport au méridien de cette capitale, en cinglant vers l'Eft ou vers l'Oueft. Par exemple, fi le navire fe trouve à l'Eft du méridien de Paris, pour avoir l'heure qu'il eft dans cette dernière Ville, il faut fouftraire la différence des méridiens, réduite en tems, de l'heure que l'on compte dans le navire; fi au contraire, le navire eft à l'Oueft de Paris, on ajoutera la différence des méridiens au tems compté fur le navire, & l'on aura ainfi l'heure qu'il eft au même inftant à Paris. Quelques exemples fuffiront pour mettre fur la voie.

EXEMPLE I.

Le 20 Juillet, à midi, un navire étant en mer par 45°. de longitude occidentale de Paris, on demande l'heure que l'on compte au même inftant dans cette Ville.

Puifqu'on eft à l'Oueft de Paris, on doit compter fur le navire moins qu'à Paris; car il eft clair, par tout ce que nous avons dit (231, 232), que le foleil a déja paffé au méridien de cette Ville: donc, fi l'on ajoute la différence des méridiens,

réduite

réduite en tems, à l'heure comptée sur le navire, on aura celle que l'on compte au même instant à Paris.

Long. du navire 45°. Ouest de Paris, ou différence des méridiens réduite en tems	3h.	0′	0″
Tems astronom. compté sur le navire, le 20 Juillet, à	0	0′	0″
Tems astron. compté à Paris, le 20 Juillet	3h.	0′	0″
Ou à 3 h. du soir en tems civil			

EXEMPLE II.

On demande l'heure astronomique qu'il est à Paris, quand on compte le 10 Janvier à 6 heures du matin sur un navire qui est par 36°. 30′ de longitude orientale du méridien de cette dernière Ville.

Le Navire étant à l'Est de Paris, on doit y compter plus que dans cette Ville : donc pour avoir l'heure qu'il est au même instant à Paris, il faut retrancher la différence des méridiens réduite en tems de l'heure comptée sur le navire.

Le 10 Janv. à 6 h. du m. se réduit, en tems astron. au 9 Janvier, à	18h.	0′	0″
La long. orient. du navire 36°. 30′ donne, pour différence des méridiens réduite en tems, —	2	26′	″
Tems astr. compté à Paris le 9 Janv. à	15h.	34′	″

Ou le 10 Janv. à 3 h. 34′ du m. en tems civil.... :

Nous avons supposé dans ces deux exemples la longitude comptée de part & d'autre du méridien de Paris ; mais si on la compte de l'île de Fer, dans le sens de l'Est à l'Ouest tout autour du globe, il faudra d'abord la réduire à celle de Paris de la manière suivante :

Retranchez toujours 20 degrés de la longitude comptée de l'île de Fer, à cause que le méridien de cette Ile est plus occidental que celui de Paris de toute cette quantité, le reste sera la longitude orientale de Paris.

Si ce reste excède 180°., vous le soustrairez de 360°., & la différence sera la longitude occidentale de Paris.

Mais si la longitude comptée de l'île de Fer est au-dessous de 20°., vous la soustrairez de 360°., & la différence sera la longitude occidentale de Paris.

EXEMPLE III.

Un navire part de Dunkerque pour l'Amérique ; dans sa traversée, il se trouve par 304°. de longitude de l'île de Fer, le 25 Juin, à dix heures du matin : on demande l'heure astronomique & civile qu'il est alors à Paris.

Je commence d'abord à retrancher 20°. de 304°., & parce que le reste 284°. excède 180°., je l'ôte de 360°., il me reste 86°. pour la longitude occidentale de Paris, laquelle, réduite en tems, donne 5 h. 44′. Donc on doit compter

à Paris 5 h. 44′ de plus que sur le navire ; c'est-à-dire, qu'au même instant où l'on compte à bord 10 heures du matin, il est à Paris, le 25 Juin, 1 h. 44′ en tems astronomique, ou 1 h. 44′ du soir en tems civil.

EXEMPLE IV.

Un navire étant parti de Brest, se trouve quelque tems après par 81°. 45′ de longitude de l'île de Fer ; & compte à bord le 12 Décembre à 5 h. du matin. On demande quelle heure il est alors à Paris.

Je retranche 20°. de 81°. 45′. La différence 61°. 45′ est la longitude orientale de Paris : on compte donc moins à Paris de toute cette quantité réduite en tems ; c'est-à-dire, que le 12 Décembre, à 5 heures du matin comptées sur le navire, revient au 11 Décembre, à 12 h. 53′, tems astronomique compté à Paris, ou au 12 Décembre, à 53′ après minuit, en tems civil.

EXEMPLE V.

Un navire part de l'île de Bourbon, pour venir en Europe ; après avoir couru 95°. 40′ à l'Ouest de cette Ile, il compte le 1 Mars à 3 heures du soir. On demande l'heure qu'il est alors à Paris.

En ouvrant la table de la différence des méridiens, entre Paris & les principaux lieux de la Terre qu'on trouve à la fin de cet Ouvrage, je

vois que l'île de Bourbon eſt par 53°. 10′ à l'Eſt du méridien de Paris. Or le navire ayant couru 95°. 40′ à l'Oueſt de cette Ile, a déja outrepaſſé le méridien de Paris, puiſqu'il ſe trouve à 42°. 30′. du côté de l'Oueſt. Ainſi le 1 Mars, à 3 h. du ſoir ſur le navire, doit répondre ſur le méridien de Paris, au 1 Mars, à 5 h. 50′ en tems aſtronomique, ou à 5 h. 50′ du ſoir en tems civil.

De la grandeur abſolue des Degrés terreſtres.

241 ... Connoiſſant par obſervation la latitude & la longitude de différens lieux ſur la ſurface du globe, il étoit de la plus grande importance pour la Géographie & la Navigation de connoître la grandeur abſolue de la Terre, afin d'avoir la véritable diſtance de ces lieux; mais rien ne paroiſſoit en même tems plus difficile à entreprendre: car comment meſurer cette vaſte étendue de continens, dont la ſurface, entrecoupée de rivières & de lacs, eſt couverte de montagnes & environnée de mers de toute part? Cette entrepriſe paroiſſoit, ſans doute, au-deſſus des efforts de l'eſprit humain; & l'on n'y feroit jamais parvenu, ſi l'on n'avoit pu conſidérer la Terre comme un corps parfaitement ſphérique. C'eſt dans cette hypothèſe que les Anciens entreprirent de déterminer ſa grandeur. Ils commencèrent d'abord à meſurer une partie de ſa circonférence dans le ſens du méridien; enſuite ſe ſervant avec adreſſe du changement de hauteur,

ſoit du pole, ſoit des aſtres, ils eurent en degrés la valeur de l'arc terreſtre qu'ils avoient meſuré.

242... Ce travail exige donc deux opérations différentes; meſure géodéſique en toiſes ou diſtances itinéraires quelconques, & meſure aſtronomique en degrés. L'exécution de celle-ci eſt même ſuſceptible de deux méthodes différentes, ou par l'obſervation des aſtres qui paſſent au zénit d'un certain lieu & ſont éloignés du zénit d'un autre, ou par la différence des hauteurs méridiennes du ſoleil entre deux lieux déterminés. C'eſt ce que firent autrefois en Egypte *Eratoſthène* & *Poſſidonius*; l'un ſe ſervit de la première méthode pour connoître la diſtance entre Alexandrie & Sienne, & l'autre employa la ſeconde pour fixer celle qu'il y avoit entre Alexandrie & Rhodes. Mais comme on ne peut ſe diſſimuler que les connoiſſances aſtronomiques des Anciens & leurs reſſources, ſur-tout en inſtrumens propres à l'obſervation, ne fuſſent très-foibles, & par conſéquent leurs meſures peu exactes, il eſt eſſentiel de faire connoître ici de quelle manière les Modernes s'y ſont pris pour avoir, avec plus de préciſion, la véritable grandeur de la Terre.

La premiere meſure qu'on ait faite avec préciſion, dit M. *de Lalande*, pour connoître la grandeur de la Terre, celle qui a été répétée & conſtatée avec plus de ſoin, c'eſt la meſure du degré du méridien entre Paris & Amiens.

243... L'exécution de cette entrepriſe, qui

qui a été commencée en 1669, & publiée en 1671, est due aux soins & à l'intelligence de M. *Picard*, Astronome François. L'objet qu'il se proposa d'abord, fut de connoître le nombre de toises qu'il y avoit en droite ligne entre Paris & Amiens. Dans cette vue, ayant choisi pour base de ses opérations trigonométriques, la distance de Ville-Juif à Juvisi, il se contenta de mesurer toise à toise cet espace, qu'il trouva de 5663 toises, & détermina tout le reste par une suite de triangles dépendans les uns des autres. Ensuite ayant observé aux deux extrémités de l'arc terrestre avec un secteur de dix pieds de rayon (1), la distance au zénit des mêmes étoiles, il en conclut que la grandeur d'un degré du méridien terrestre étoit de 57060 toises, valeur assez approchée, puisque la vérification qui en a été faite en 1756, ne la porte qu'à 57069 toises. D'après cette mesure, la grandeur ou la circonférence de la Terre sera donc de 57069×360=10,544,840 toises.

244... Le degré mesuré par M. *Picard* supposoit que la Terre fût exactement sphérique, & que les lignes perpendiculaires à l'horison qui mesurent les degrés dans le ciel, fussent dirigées au centre de la Terre : mais si le globe que nous

(1) Il étoit important d'employer un tel instrument à la mesure de l'arc céleste, parce qu'une seconde d'erreur dans l'observation de la hauteur des étoiles cause, sur la surface de la Terre, une différence d'environ 16 toises ; tandis que cette erreur sur un angle à la surface de la Terre, n'est presque d'aucune conséquence dans les opérations géométriques.

habitons est plus convexe dans une partie de sa circonférence que dans l'autre, ses degrés ne seront pas égaux, & celui d'entre Paris & Amiens ne sera plus la 360e partie de sa circonférence. Ce doute étoit trop raisonnable & trop bien fondé, pour ne pas suspendre le jugement des Savans sur un objet aussi important que celui de la figure & de la grandeur de la Terre.

245... Ce fut aussi pour s'en assurer que l'Académie des Sciences de Paris songea à se procurer la mesure de plusieurs degrés sous différentes latitudes. Le Gouvernement applaudit aux vues sublimes de cette Compagnie, & donna ses ordres pour que rien ne manquât à l'exécution de cette entreprise. En conséquence MM. *Godin*, *de la Condamine* & *Bouguer* furent envoyés au Pérou en 1735; & l'année après, MM. *de Maupertuis*, *Clairaut*, *Camus* & *Lemonier* partirent pour le Nord de la Suède. Les premiers trouvèrent que la grandeur d'un degré du méridien terrestre sous l'équateur répondoit à 56750 toises; & les seconds, que le degré du méridien terrestre qui coupe le cercle polaire, étoit de 57440 toises. On conclut de là que le 45e degré, qui tient un milieu entre le Nord & l'équateur, devoit être de 57030 toises.

246... Puisque tous ces degrés sont différens entr'eux, il est prouvé démonstrativement que la Terre n'est pas parfaitement ronde. Sa surface est plus courbe vers l'équateur, puisque les degrés y sont plus petits; & elle est plus applatie vers les poles, puisque les degrés y sont plus

grands : de ſorte que l'axe de la Terre, ou la ligne droite qui va de l'un à l'autre pole, eſt plus petite que le diamètre de l'équateur d'environ treize lieues. Au reſte cette différence, dit M. *Bouguer*, n'eſt pas aſſez grande pour qu'on puiſſe s'en appercevoir dans les éclipſes de Lune ; on peut même ſe diſpenſer d'y avoir égard dans la Marine.

247... C'eſt ſur la grandeur moyenne 57030 toiſes, qu'on a fixé en France celle de la lieue terreſtre & de la lieue marine. La première n'eſt que la 25ᵉ partie d'un degré ; c'eſt-à-dire, de 2281 toiſes en négligeant la fraction (1) ; & la ſeconde en eſt la 20ᵉ partie, c'eſt à-dire, de 2851 toiſes $\frac{1}{2}$. Cette dernière valeur répond exactement à 3′ de degré ; d'où il ſuit que pour convertir en degrés & minutes de degré un nombre quelconque de lieues marines, il faut en prendre le vingtième ; ce qui donnera les degrés, & tripler le reſte pour avoir les minutes.

Par exemple, pour convertir 735 lieues marines en degrés & parties de degré, j'aurai, en opérant comme il vient d'être dit, 36°. 45′ ; & réciproquement, pour convertir ces degrés & minutes en lieues marines, il faut multiplier par 20 le nombre des degrés, & ajouter à ce

(1) Les Aſtronomes François la font de 2283 toiſes, en ſe fixant à la grandeur du dugré du méridien entre Paris & Amiens.

produit le tiers du nombre des minutes. Ainsi,

$$20 \times 36 = 720 + 15 = 735 \text{ lieues.}$$

248... Les Anglois & les Italiens ne comptent pas par lieues, mais par milles; ils en mettent 60 au degré: de sorte que chaque mille répond précisément à une minute de degré, ou à un tiers de notre lieue marine; c'est-à-dire, à 950 toises $\frac{1}{2}$.

Des Cartes Marines, & de leur construction.

249... Les *Cartes hydrographiques* ou *marines* sont des plans qui représentent une partie de la surface de la mer avec les côtes adjacentes. On y marque les îles, les rochers, les bancs de sable, &c., & on y distingue surtout plusieurs roses de vent qui servent à indiquer & à faciliter aux pilotes la route qu'ils doivent tenir pour aller d'un lieu à un autre. Le principe de leur construction n'est pas le même que celui des Cartes géographiques. Dans celles-ci les méridiens sont représentés par les lignes courbes, qui vont se rencontrer aux poles en s'approchant continuellement les uns des autres, à mesure qu'ils s'éloignent de l'équateur; au lieu que dans les Cartes marines, les méridiens sont représentés par des lignes droites & parallèles entr'elles: de sorte que, par cette construction, les degrés de longitude ou des parallèles, situés à différentes latitudes, sont tous égaux à

ceux de l'équateur ; ce qui eſt le contraire dans les Cartes géographiques.

Voici les raiſons qui ont fait adopter cette eſpèce de conſtruction, & les moyens qu'on a employés dans la ſuite pour corriger le défaut qui devoit en réſulter.

250... Les Hydrographes ayant conſidéré attentivement que chaque rumb de vent fait conſtamment le même angle avec tous les méridiens qu'il rencontre ſur la ſurface du globe, virent d'abord que ces rumbs ne pouvoient être repréſentés que par des lignes courbes ſur les Cartes géographiques. Ils ſentirent en même tems combien il ſeroit difficile aux navigateurs, non ſeulement de ſuivre les contours ou ſpires de ces courbes, qu'on nomme *loxodromies*, mais encore de meſurer les diſtances parcourues le long de ces lignes ; ce fut la raiſon pour laquelle on imagina de ſubſtituer les Cartes marines aux Cartes géographiques.

Il y a deux ſortes de Cartes marines ; *les Cartes plates, & les Cartes réduites.*

251... Les Cartes *plates* ſont ainſi nommées, parce que la partie du globe qu'elles repréſentent, eſt ſuppoſée n'avoir pas de courbure ſenſible ; elles ne ſont guère d'uſage que pour le Cabotage : on s'en ſert quelquefois dans les courtes navigations, quoiqu'il fût beaucoup plus ſûr de ne ſe ſervir que des Cartes *réduites*, dont nous parlerons dans peu.

Afin d'être en état d'apprécier le défaut des Cartes plates, voici le principe de leur construction.

Il suppose que la *fig.* ABCD embrasse une petite partie de la surface de l'hémisphère septentrional, comprise entre le quarantième & le cinquantième parallèle, & entre le vingtième & le trente-deuxième degré de longitude occidentale de Paris. Après avoir tiré la droite MR, pour représenter le méridien qui doit régner au milieu de la Carte, on la divisera en autant de parties égales, qu'il y a de degrés de latitude depuis R, jusqu'à M; c'est-à-dire, en dix parties. Sur le milieu E de MR, on élevera la perpendiculaire PL, qui représentera le moyen parallèle; & afin de déterminer les parties EP, EL, qui doivent marquer les degrés de longitude, d'un rayon (*of*), égal à la longueur d'un degré du méridien MR, pris sur une échelle de parties égales, on décrira l'arc (*gf*), qu'on fera d'autant de degrés, qu'il y en a depuis l'équateur, jusqu'au moyen parallèle de la Carte. Ce nombre de degrés est ici de 45. ; puis abaissant du point (*g*) la perpendiculaire (*gh*), le co-sinus (*oh*) exprimera la grandeur que doit avoir chaque degré du moyen parallèle PL, ou chaque degré de longitude; car les longueurs des arcs d'un même nombre de degrés pris sur différens parallèles, sont proportionnelles aux co-sinus de la latitude de ces mêmes parallèles. 69.

On portera donc (*oh*) de E vers P & vers L, autant de fois que la Carte doit avoir des degrés

FIG. de longitude, & ce ſera l'étendue de la Carte en longitude. Alors tirant par tous les points de diviſion de MR des parallèles à PL, & par tous
69 les points de diviſion de PL des parallèles à MR, on aura tous les degrés de latitude & de longitude de la Carte plate ABCD, à l'aide deſquels il ſera facile de marquer les différens lieux ou points de la mer qu'elle repréſente.

D'après cette conſtruction, il eſt évident que les Cartes plates ſont plus commodes que les Cartes géographiques pour l'uſage de la navigation, parce que les méridiens y étant repréſentés par des lignes parallèles, les rumbs de vent deviennent alors des lignes droites faciles à meſurer; mais on ne peut ſe diſſimuler en même tems que ces Cartes ſont d'autant moins exactes, qu'elles ont plus d'étendue du Sud au Nord, & que la partie du globe qu'elles repréſentent eſt par une plus grande latitude; car alors le pole étant plus voiſin, les méridiens doivent différer davantage d'être parallèles.

Leur défaut eſt de donner les degrés des parallèles trop petits d'un côté, & trop grands de l'autre. On s'apperçut de ce défaut, ſi-tôt qu'on commença à s'en ſervir; mais ce ne fut qu'après de longues tentatives, qu'on réuſſit à y apporter la correction néceſſaire, en leur ſubſtituant les Cartes réduites, dont l'uſage eſt tout à la fois exact & commode.



Des Cartes réduites (1).

252... On peut considérer, suivant M. *Bézout*, les Cartes *réduites* qui représentent une portion de la surface de la mer, comme autant de parties du développement d'un cylindre, qu'on peut imaginer circonscrit à la Terre, qui a par conséquent pour diamètre de sa base & pour hauteur le diamètre même de l'équateur, mais qui est infini en longueur. Le but de leur construction est uniquement de rendre les méridiens parallèles, sans néanmoins changer le rapport qu'il y a entre les parties du méridien ou les degrés de latitude, & les parties des parallèles ou les degrés de longitude correspondans.

Pour y parvenir, au lieu de diminuer l'étendue des degrés des parallèles à mesure que la latitude augmente, on les fait par-tout égaux à ceux de l'équateur; mais on donne à chaque degré du méridien une valeur d'autant plus grande, que les degrés du parallèle correspondant devroient être plus petits.

---

(1) L'invention des Cartes réduites est due à *Gerard Mercator*, qui, vers l'an 1550, publia la première carte de cette espèce; mais il n'en expliqua point les principes. Ce fut *Edouard Wright* qui les découvrit vers l'an 1590; mais il ne fut reconnu pour l'Auteur de cette belle découverte, que neuf ans après.

On trouve dans l'Hydrographie du P. *Fournier*, qu'en 1690, un nommé *le Vasseur* de Dieppe, enseigna la manière de s'en servir aux navigateurs François.

FIG. 253... Pour concevoir de quelle manière on a déterminé l'augmentation graduelle qu'on doit donner à chaque degré du méridien, il faut considérer d'abord que le plan de chaque parallèle
68 étant perpendiculaire à l'axe de la Terre, le rayon de chacun de ces petits cercles devient le co-sinus de sa latitude ou de sa distance à l'équateur. Par exemple, le rayon SB du parallèle SBDS est le sinus de l'arc SP, qui est sa distance au pole, ou le co-sinus de l'arc ES, qui exprime sa distance à l'équateur. Ainsi à mesure qu'on avance vers les poles, les dégrés des parallèles diminuent dans le même rapport que leurs circonférences, & leurs circonférences dans le même rapport que leurs rayons; de sorte que le parallèle qui est à 60°. de l'équateur, n'est éloigné que de 30°. du pole: or le sinus de 30°. étant la moitié du sinus total ou du rayon de l'équateur (152), la circonférence de ce parallèle n'est plus que la moitié de celle de l'équateur. Les degrés de longitude sur ce parallèle ne sont donc que la moitié de ceux de l'équateur; c'est-à-dire, de dix lieues.

254... Donc puisqu'en général *la grandeur d'un degré pris sur un parallèle quelconque, est à celle d'un degré de l'équateur, comme le co-sinus de la latitude est au rayon, ou comme le rayon est à la sécante de la latitude* [car nous avons vu (142) que les secantes augmentent dans le même rapport que les co-sinus diminuent], si l'on fait constamment le degré de chaque parallèle égal à celui de l'équateur, tandis qu'il devroit être

plus petit d'autant que la ſecante de la latitude FIG.
eſt plus grande, lorſqu'il s'agira d'un parallèle ſitué à une latitude quelconque, il faudra compter le degré correſpondant du méridien, comme 68
s'il avoit pour valeur le degré de l'équateur, augmenté dans le rapport du rayon à la ſecante de la latitude; c'eſt-à-dire, multiplié par la ſecante de la latitude diviſée par le rayon.

255... Mais ſi l'on fait attention que chaque degré du méridien terreſtre ne laiſſe pas que d'avoir une certaine étendue, on verra clairement que la ſecante qui répond à la première minute d'un degré, n'eſt pas la même que celle qui répond à la vingtième, à la quarantième ou à la ſoixantième, puiſque tous ces différents points d'un même degré ne ſont pas à la même diſtance de l'équateur. On ſe tromperoit donc, ſi l'on croyoit que, pour augmenter les degrés de latitude, il eût été ſuffiſant de les multiplier par les ſecantes correſpondantes. Afin d'arriver à un degré de préciſion convenable, on a imaginé de partager le méridien en parties très petites; alors multipliant la valeur de l'une quelconque de ces parties, par la ſecante de la la latitude correſpondante, diviſée par le rayon, on a eu la valeur que cette partie du méridien doit avoir ſur la Carte réduite, & cela d'autant plus exactement, que cette partie a été priſe plus petite.

L'exactitude eſt ſuffiſante lorſque le méridien eſt diviſé en minutes, parce qu'on peut ſuppoſer, ſans erreur ſenſible, qu'une petite partie de la

FIG. surface de la mer, qui n'a qu'une minute de degré, ou $\frac{1}{3}$ de lieue marine en tout sens, est exactement plane.

68 256... Ainsi, afin d'avoir l'étendue qu'on doit donner au méridien, pour marquer une certaine latitude sur la Carte réduite, il faut prendre dans les tables ordinaires des sinus toutes les secantes naturelles de minute en minute, depuis zero, jusqu'au degré de latitude dont il s'agit. La somme de ces secantes, divisée par le rayon, donnera un nombre de minutes qui, étant porté depuis l'équateur sur le méridien, déterminera le degré de latitude dont il s'agit, avec une exactitude suffisante.

On appelle *latitudes croissantes*, les degrés du méridien augmentés & réduits suivant cette méthode.

Veut-on savoir, par exemple, quelle est l'étendue qu'on doit donner à l'arc du méridien d'une Carte réduite, qui s'étend depuis l'équateur, jusqu'au trentième parallèle? On prendra d'abord la somme de toutes les secantes de minute en minute, depuis zero, jusqu'au trentième degré de latitude; on la divisera par le rayon, qui est de 100,000 parties; ou, pour abréger, on en retranchera les cinq derniers chiffres, & le reste 1888', exprimera la grandeur de l'arc du méridien, depuis l'équateur, jusqu'au trentième degré de latitude. Si l'on veut savoir de combien est cette augmentation, il n'y aura qu'à soustraire le produit de $60' \times 30 = 1800'$ de $1888'$, & on trouvera qu'elle est de 88'.

257 ... Enfin si l'on fait successivement la somme de toutes les secantes de 60′ en 60′, & qu'on en retranche les cinq derniers chiffres, on aura la grandeur qu'on doit donner à chaque degré du méridien d'une Carte réduite. C'est ainsi qu'on a calculé la table des latitudes croissantes, qu'on trouve à la fin de cet Ouvrage. Cette table est extrêmement commode, en ce qu'on trouve à côté de chaque degré de latitude, de dix en dix minutes, la grandeur qu'il faut donner aux différentes parties du méridien d'une Carte réduite. FIG.

258 ... Qu'il soit question, par exemple, de construire la Carte réduite ABCD d'une partie de la surface de la mer, comprise entre le sixième & le seizième degré de longitude occidentale, & entre le quarante quatrième & le cinquantième degré de latitude septentrionale. Sur une échelle de parties égales, telle que la *fig.* 34e., je prends 600 parties = $60' \times 10$, que je porte sur la ligne BC, laquelle représente la portion du quarante-quatrième parallèle, dont la longueur est de 10°, chacun de 60′, & égal à celui de l'équateur; sur le milieu de cette ligne, j'éleve la perpendiculaire ME, qui est le méridien qui doit passer au milieu de la Carte; & pour marquer sur ce méridien la valeur de chaque minute, depuis le quarante-quatrième exclusivement, jusqu'au cinquantième degré de latitude, après avoir trouvé dans la table des latitudes croissantes la valeur du quarante-quatrième degré, je la retranche successivement de celle de 44°. 1′, de 44°. 2′, 70

FIG. de 44°. 3′, de 44°. 4′, de 44°. 5′, &c., ainsi de suite, jusqu'à celle du 50e.; ou pour abreger
70 ce travail, je me contente de chercher, par cette méthode, la grandeur de l'arc du méridien, de dix en dix minutes seulement. Je prends à mesure toutes ces grandeurs sur la même échelle, qui m'a servi à diviser BC; je les porte sur le méridien ME, à partir toujours du point M, & j'ai ainsi la grandeur de l'arc du méridien ME; c'est-à-dire, la différence entre les latitudes croissantes du quarante-quatrième & du cinquantième degré de latitude.

Cela étant fait, si l'on tire par les divisions de la ligne ME des parallèles à BC, & par les divisions de la ligne BC des parallèles à ME, on aura tous les parallèles & les méridiens de la Carte réduite ABCD, à l'aide desquels il sera facile de marquer les Iles, les bancs de sable, les Vigies, les Caps, les embouchures des Rivières; enfin, toutes les parties de la mer & des côtes adjacentes, selon leur longitude & leur latitude.

Au reste on a supposé dans cette construction, que la Terre étoit parfaitement sphérique, quoique toutes les nouvelles observations nous apprennent qu'elle est applatie vers les poles; mais dans une Carte de peu d'étendue, & construite sur une si petite échelle, cet applatissement est absolument insensible. Si cependant on se servoit pour sa construction d'une très-grande échelle, il est clair qu'on devroit alors avoir égard à l'ap-

platissement de la Terre, ce qui diminueroit un peu les degrés de latitude.

De la Boussole.

259. Quoique l'invention de la boussole soit généralement attribuée à *Flavio de Gioia*, Napolitain, qui vivoit dans le treizième siècle, & qu'il semble que M. *Grimaldi* ait voulu constater ce point d'histoire dans sa belle Dissertation imprimée parmi celles de l'Académie Etrusque, il n'est pas moins certain que la boussole étoit connue en France avant l'année 1200, comme il paroît par les Poësies de *Hugues de Bercy* & de *Jean de Mehun*, cités l'un & l'autre par *Pasquier*, dans le quatrième Livre de ses *Recherches sur la France*. Quoi qu'il en soit de la date de cette découverte, « la boussole, dit M. » *Van-Swinden* (1), parut fournir aux Marins » un moyen sûr pour se guider & pour trou- » ver le vrai Nord en tout tems. On s'y fia » long-tems, sans y soupçonner la moindre » erreur: (tant il est vrai qu'on étoit alors peu » observateur!). Plus de trois siècles s'écoulèrent » avant que la déclinaison fût bien constatée, » & encore ne l'admit-on qu'après y avoir opposé » tout ce que les préjugés & de faux principes » de physique purent fournir d'argumens «.

(1) Voyez le Mémoire de M. *Van-Swinden*, sur la meilleure manière de construire les boussoles, couronné en 1777.

260... La boussole dont on se sert aujourd'hui pour la navigation, consiste principalement en une aiguille ou lame d'acier, qui ayant été frottée à une pierre d'aimant, ou plutôt à un aimant artificiel, en a reçu la propriété singulière de se diriger vers le Nord, & d'indiquer à-peu-près la direction du méridien, & par conséquent la route du navire. Pour cet effet, il faut qu'étant suspendue sur un pivot, elle puisse tourner librement, revenir, après quelques balancemens, à sa position naturelle, & s'y fixer.

261... Cette ligne dans laquelle l'aiguille se fixe ainsi d'elle-même, malgré les mouvemens de roulis & de tangage du vaisseau, s'appelle le *méridien magnétique*.

C'est à la ligne méridienne déterminée par le mouvement du soleil ou des astres, qu'on rapporte la situation de l'aiguille aimantée, & l'on appelle *déclinaison* ou *variation de l'aiguille*, l'angle qu'elle fait sur un plan horisontal avec la méridienne ou la ligne Nord & Sud. Cette déclinaison n'est pas la même dans tous les lieux de la Terre; elle est même variable en différens tems pour un même lieu. Il est donc essentiel de s'assurer de ses différens changemens le plus souvent qu'il est possible, sur-tout en mer, où elle doit servir de guide aux Navigateurs. Nous donnerons (692 & *suiv.*) les moyens de déterminer les degrés de cette variation par l'observation des astres.

262... Dans les boussoles marines, l'aiguille aimantée est posée sur un style de cuivre, au

FIG.

moyen d'une chappe pratiquée dans le milieu de ſa plus grande largeur : elle eſt enfermée dans une boîte ronde, couverte d'une glace, comme les bouſſoles ordinaires. Cette aiguille, pour être bonne, doit avoir deux qualités eſſentielles ; celle d'être bien ſuſpendue par ſon centre de gravité, afin que rien ne l'empêche de ſuivre ſa direction naturelle ; & celle de n'être pas auſſi mobile ſur ſon pivot que l'eſt ordinairement l'aiguille des bouſſoles dont on ſe ſert à terre. Pour cet effet, on la charge dans ſon milieu d'un morceau de carton, ou de talc très-mince, taillé en rond, & collé entre deux morceaux de papier ; en ſorte que dans ſon mouvement elle eſt obligée d'entraîner avec elle ce cercle qui, par ſon poids, modère la trop grande facilité qu'elle auroit à vaciller. Ces deux qualités ne paroiſſent pas bien faciles à concilier ; auſſi ce problême de phyſique n'eſt-il pas auſſi aiſé à réſoudre qu'on le penſe.

263 ... C'eſt ſur le cercle de carton appliqué ſur la chappe de l'aiguille, qu'eſt tracée la roſe des vents. Ce cercle eſt entouré d'un autre cercle concentrique, lequel étant diviſé en 360°. ſert à meſurer les angles de la déclinaiſon de l'aiguille. 71
Les quatre points *cardinaux*, *Nord*, *Sud*, *Eſt*, & *Oueſt*, partagent la roſe de la bouſſole, ainſi que l'horiſon, en quatre parties égales. Le Nord eſt indiqué par une fleur de lys, qui répond à l'extrémité de l'aiguille. Le diamètre qui paſſe par ce point, & aboutit à l'autre point oppoſé du cercle de carton, repréſente la ligne méri-

G. dienne ou la ligne Nord & Sud de la bouſſole. Un ſecond diamètre, perpendiculaire au premier, indique, par ſes extrémités, l'Eſt & l'Oueſt. On nomme ces quatre points, *cardinaux*,
71 parce qu'ils communiquent leur nom à tous les autres vents.

L'air de vent qui eſt entre le Nord & l'Eſt, emprunte ſon nom des deux premiers, & ſe nomme *Nord-eſt*. On nomme également *Nord-oueſt* celui qui eſt entre le Nord & l'Oueſt; *Sud-eſt*, celui qui eſt entre le Sud & l'Eſt; *Sud-oueſt*, celui qui eſt entre le Sud & l'Oueſt. L'horiſon, ou le contour de la bouſſole, ſe trouve ainſi diviſé en huit parties égales.

On partage encore chacun de ces airs de vent en deux autres, & l'on donne à ces nouveaux rumbs un nom compoſé des deux autres entre leſquels ils ſe trouvent. Ainſi on nomme *Nord-nord-oueſt*, celui qui eſt entre le Nord & le Nord-oueſt; *Sud-ſud-oueſt*, celui qui eſt entre le Sud & le Sud-oueſt, ainſi des autres. Enfin, pour avoir les trente-deux rumbs de vent qu'on diſtingue dans la Marine, on ſubdiviſe les ſeize qu'on vient d'obtenir, chacun en deux autres; mais pour abréger, on nomme celui qui eſt entre le Nord & le N-N-E, *Nord quart de Nord-eſt*, parce qu'il exprime le $\frac{1}{4}$ de la diſtance qu'il y a du Nord au N-E, & on l'écrit ainſi, $N \frac{1}{4} N\text{-}E$. On nomme de même $N\text{-}E \frac{1}{4} N$, celui qui eſt entre le N-E & le Nord; $S \frac{1}{4} S\text{-}O$, celui qui eſt entre le Sud & le S-O; $S\text{-}O \frac{1}{4} S$, celui qui eſt entre le S-O & le Sud, &c., ainſi qu'on peut le voir par la *fig.* 71[e]., qui repréſente les trente-

deux rumbs de vent, & dont l'expoſition ſeule ſera mieux comprendre ce que je viens de dire, que le détail le plus circonſtancié.

A cauſe de l'agitation du vaiſſeau, dont les ſecouſſes ſont quelquefois très-violentes, on eſt obligé de munir la bouſſole d'une double boîte, de manière que celle du dedans eſt ſoutenue ſur pluſieurs cercles de cuivre, appellés *balanciers*, dont la diſpoſition eſt telle, qu'elle peut ſe mouvoir en deux ſens différens. Cette ſuſpenſion lui procure l'avantage de ſe maintenir dans une ſituation horiſontale, ou d'y revenir par un mouvement plus doux, lorſqu'elle en a été dérangée par l'agitation du vaiſſeau.

Différentes ſortes de Bouſſoles, & de leurs uſages.

264... Les Marins nomment *compas de route* la bouſſole dont ils ſe ſervent pour diriger le cap, ou la proue du navire, du côté vers lequel ils veulent aller. Cette bouſſole eſt placée dans l'*habitacle*, eſpèce d'armoire ouverte, & ſituée perpendiculairement à la longueur de la quille du vaiſſeau. La boîte extérieure de la bouſſole eſt parfaitement quarrée, de ſorte qu'il ſuffit ordinairement d'examiner la ſituation de la roſe des vents, à l'égard des deux côtés de la boîte ou même de l'habitacle, pour connoître la direction de la quille, ſans être obligé de jetter les yeux ſur l'avant du vaiſſeau.

265... Quand la bouſſole ſert à relever les

FIG. objets éloignés, ou à observer le lever ou le coucher du soleil, pour connoître la variation de l'aiguille aimantée, on l'appelle alors *compas de variation*. Sa boîte extérieure est garnie de
72 deux pinnules A & B, par lesquelles on vise aux objets dont on veut savoir la direction; mais cet instrument exige toujours le concours de deux observateurs. Pendant que l'un pointe à l'objet, à travers des pinnules, il faut que l'autre examine quelle est la situation de la ligne Nord & Sud de la rose des vents, à l'égard du fil EG tendu perpendiculairement à la ligne AB, qui joint les deux pinnules. L'angle que font ces deux lignes, est précisément égal à celui que fait la direction de l'objet observé avec le méridien magnétique; ce qu'il est facile de voir en jettant les yeux sur la *fig.* 72[e].

Si, par exemple, on observe le lever ou le coucher du soleil le jour de l'Equinoxe; la ligne Nord & Sud de la rose doit répondre exactement sous le fil EG; & sa distance à la direction AB des deux pinnules doit être alors de 90°., s'il n'y a point de variation; parce qu'au tems des Equinoxes, le soleil n'a point d'amplitude; il se lève & se couche aux vrais points d'Est & d'Ouest. S'il y a de la variation, cette distance sera plus petite ou plus grande, selon que la variation de l'aiguille sera du même côté de l'astre observé, ou du côté opposé.

Si l'on observe le lever ou le coucher du soleil dans tout autre tems de l'année, où cet astre a une amplitude quelconque, en comparant l'am-

plitude obſervée avec l'amplitude calculée d'avance pour ce jour-là, la différence donnera toujours la variation de l'aiguille, laquelle peut être indifféremment du côté de l'Eſt ou du côté de l'Oueſt. Ce que nous venons de dire du ſoleil, peut avoir lieu pour un autre aſtre d'une déclinaiſon connue.

266... Mais il n'eſt pas toujours poſſible de ſe ſervir en mer du compas de variation pour obſerver le lever ou le coucher des aſtres, à cauſe des vapeurs qui bordent l'horiſon, & qui les cachent ſouvent pour pluſieurs jours de ſuite. Alors on attend que les aſtres ſoient parvenus à quelque degré d'élévation au-deſſus de l'horiſon; mais c'eſt alors préciſément qu'on ne peut pas compter ſur l'exactitude des obſervations faites avec le compas de variation, parce que cet inſtrument n'étant propre qu'à meſurer des angles formés ſur un plan horiſontal, il ſuit qu'à une hauteur médiocre, l'erreur va quelquefois juſqu'à quatre ou cinq degrés ſans qu'on s'en apperçoive. Afin d'obvier à cet inconvénient, M. *Halley* en a imaginé un autre, qu'il nomme *compas azimutal*, parce qu'il ſert à faire connoître la variation de l'aiguille par les *azimuts* des aſtres. On trouvera (718 & 719) la deſcription de cet inſtrument, & la manière de s'en ſervir.

267... Lorſqu'en faiſant route, la variation de l'aiguille ſe trouve du côté de l'Eſt, & qu'on veut y avoir égard, il faut la compter à gauche du rumb de vent que l'on ſuit, & ſi elle eſt du côté de l'Oueſt, il faut la compter à droite.

Par exemple, pour faire route au N-O$\frac{1}{4}$N, la variation étant de 15°. du côté de l'Eſt, on dirige le cap ou la proue du navire au N-O 3°. 45′ Oueſt. Si au contraire la variation eſt du côté de l'Oueſt, on dirige la proue au N-N-O 3°. 45′ Nord. Enfin il faut porter le cap à droite, d'autant que la variation porte à gauche; mais dans la pratique ordinaire de la navigation, le pilote qui eſt de quart ſe contente ſeulement de tenir une note exacte de la quantité de variation dont toutes ſes routes ont été affectées, ſe propoſant enſuite d'y avoir égard, ou de les corriger de cette erreur, lorſqu'il en fait le calcul.

La variation du côté de l'Eſt ſe nomme par les Marins, *variation N-E*; & celle du côté de l'Oueſt, *variation N-O*. C'eſt de ces dernières expreſſions dont nous nous ſervirons à l'avenir.

268... Quoique le compas de route ſerve à déterminer la poſition de la quille du vaiſſeau à l'égard de la ligne Nord & Sud de la bouſſole, & à la maintenir ou à la ramener à cette poſition par le moyen du gouvernail, lorſqu'elle s'en écarte, il ne fait pas connoître la direction de la route du vaiſſeau, qui, le plus ſouvent, eſt différente de celle de ſa quille.

Lorſque le vent n'eſt pas favorable, on eſt obligé d'orienter les voiles obliquement. Cette obliquité de voiles force le vaiſſeau d'aller plus ou moins de côté, ſelon qu'elles ſont orientées plus ou moins obliquement; de ſorte qu'il s'en faut quelquefois de beaucoup qu'il ne ſuive dans ſon mouvement la direction de ſa quille.

On nomme *dérive*, cet écart ou l'angle que fait la vraie route du vaiſſeau avec la ligne de ſa longueur. Cet angle eſt plus ou moins grand, & dépend de la direction & de la force du vent, des courans, des marées, de la figure du vaiſſeau, & de la manière dont il eſt appareillé. Si l'angle d'incidence que fait le vent avec le vaiſſeau, eſt du côté de la proue, la dérive n'eſt pas conſidérable; elle augmente au vent largue; elle eſt encore plus grande, ſi l'on court au plus près. Un vaiſſeau dérive plus avec ſes baſſes voiles qu'avec ſes huniers : enfin cet angle de dérive eſt quelquefois de 20, 25 ou 30 degrés; mais comme le vaiſſeau, en fendant les eaux de la mer avec force, laiſſe toujours derrière lui une trace que les Marins appellent *houache*. Il ſuffit de prendre cette trace pour la vraie route, en ſuppoſant du moins que la mer n'ait aucun mouvement propre, & de la relever au compas de variation, afin de ſavoir l'angle qu'elle fait avec la quille du vaiſſeau.

269... La connoiſſance de la dérive eſt abſolument néceſſaire pour s'aſſurer de la route qu'on doit tenir. Par exemple, ſi l'on doit courir au N O, & que la dérive porte au Nord de 20°., il faut chercher ſur la roſe le rumb de vent qu'on doit tenir en ſe détournant à l'Oueſt de la même quantité; c'eſt-à-dire, qu'il faut s'écarter à gauche, autant que la dérive porte à droite.

Les Marins nomment *ſtribord*, le côté du navire qui répond à droite en regardant la proue;

& *bas-bord*, le côté qui répond à gauche. D'après ces notions, nous établirons les principes suivants.

Manière de corriger les routes de la variation & de la dérive.

270... Si la dérive est *stribord* & la variation N-E, ou si la dérive est *bas-bord* & la variation N-O, il faut les ajouter ensemble, parce qu'étant du même côté, elles doivent influer sur la route dans le même sens; leur somme indiquera alors la correction qu'il faut faire sur le rumb de vent qu'on doit tenir.

Si au contraire la dérive & la variation sont de différent côté, l'une à l'Est & l'autre à l'Ouest; c'est-à-dire, l'une à droite & l'autre à gauche; on retranchera la plus petite de la plus grande; la différence sera la correction qu'il faut faire à la route, & dans quel sens elle doit être faite.

EXEMPLE.

La variation étant de 12°. 45′ N-O, & la dérive de 21°. du côté de bas-bord, sur quel rumb de vent faut-il diriger le cap du navire pour faire route à l'O S-O?

Variation.....	N-O......	12°. 45′.
Dérive......	Bas-bord...	21
Somme.........		33°. 45′.

Puisque la variation & la dérive sont toutes

deux à gauche, leur somme indique qu'il faut pointer le cap du navire sur un air de vent éloigné de 33°. 45', à droite de l'O-S-O; c'est-à-dire, à l'O¼N-O.

AUTRE EXEMPLE.

La variation étant de 18°. N-O, & la dérive de 25°. 30' stribord, sur quel rumb de vent faut-il se diriger pour faire route au S S-O?

Variation	N-O	18°. ' "
Dérive	Stribord . . .	25. 30' "
Différence	Stribord . . .	7°. 30'.

La variation & la dérive n'étant pas du même côté, leur différence 7°. 30' stribord marque qu'il faut porter le cap à gauche du S-S-O; c'est-à-dire, au S-S-O 7°. 30' Sud.

Ce que nous avons dit au sujet de la variation pour la correction des routes, a lieu également pour la dérive. Les Marins se contentent ordinairement d'y avoir égard, lorsqu'ils font le calcul de leurs routes: c'est ce que nous aurons occasion d'examiner en détail dans la résolution des problêmes généraux de navigation.

De la figure des aiguilles des Boussoles, de la manière de les aimanter & de les suspendre.

C'est à ces trois chefs principaux que M. *Van-Swinden*, dans son Mémoire déja cité (259),

réduit les conditions requiſes pour la perfection des aiguilles des bouſſoles. Il ſeroit difficile de le ſuivre dans tous ces détails qui ſont immenſes : c'eſt dans ſon excellent Mémoire qu'il faut les lire. Nous nous contenterons ici d'appuyer & de fortifier de ſes préceptes le peu que nous avons à dire ſur cet objet.

I.

271... Quoique la forme que doit avoir l'aiguille aimantée paroiſſe aſſez indifférente à quelques-uns de ceux qui ſe ſont occupés de cette matière, je crois néanmoins, d'après le ſentiment des meilleurs Phyſiciens ſur cet objet, qu'il eſt bon de lui donner la forme d'un barreau applati, terminé de part & d'autre en feuille de laurier d'environ ſix pouces de longueur & de trois ou quatre lignes de largeur, ſur une demi-ligne d'épaiſſeur dans toutes ſes parties.

Mais une choſe qui n'eſt pas du tout indifférente, c'eſt que les deux côtés de l'aiguille ſoient parfaitement égaux, que leurs parties homogènes ſoient à égale diſtance du centre de mouvement, & que la lame ſoit faite d'un acier fin & bien trempé. Il en réſulte deux avantages.

Le premier, qu'elle eſt plus propre à recevoir une plus grande quantité de vertu magnétique, & moins en danger de la perdre.

Le ſecond, que ſes poles ayant plus de vertu, & agiſſant à l'aide d'un plus long levier que les autres parties, ils agiſſent par conſéquent avec plus de force ; car, ſuivant les principes de

M. *Van Swinden*, « les aiguilles s'approchent » d'autant plus vivement du méridien, qu'elles » ont plus de force. Or la force qui dirige une ai- » guille, n'eſt que la ſomme des forces qui dirigent » chaque particule ; donc chaque particule s'y » dirige avec d'autant plus d'énergie, qu'elle » a plus de force .... On ſait que toutes les par- » ticules d'un barreau aimanté n'ont pas une » force égale, mais que cette force croît à me- » ſure que les parties ſont plus éloignées du » centre magnétique, où la force eſt nulle, & » qu'elle eſt à ſon *maximum* dans les poles. «

II.

272... L'aimant eſt une eſpèce de pierre minerale, qui a la propriété d'attirer le fer, de lui communiquer ſa vertu, & de ſe diriger au Nord quand elle eſt ſuſpendue librement. Plus cette pierre eſt compacte, homogène, & d'un noir luiſant, plus elle renferme de vertu magnétique ; mais cet aimant naturel, quelque bon qu'il ſoit, ne vaut jamais un aimant artificiel. Celui-ci conſiſte en deux lames ou barreaux d'acier bien trempés, qu'on a aimantés fortement : c'eſt le ſeul dont on ſe ſert aujourd'hui, comme étant le plus avantageux pour aimanter les aiguilles des bouſſoles.

Il y a deux méthodes d'aimanter ſelon la double touche. La première eſt du Docteur *Michell* ; & la ſeconde, qui eſt la meilleure, eſt due à MM. *Anthaume* & *Œpinus*. Elle conſiſte principalement à incliner les deux barreaux ſur la

lame de l'aiguille que l'on veut aimanter, de manière que le pole *auſtral* du premier barreau ne ſoit tout au plus qu'à une ligne du pole *boréal* du ſecond barreau. C'eſt de celle-ci dont s'eſt ſervi M. *Van-Swinden*, & voici les préceptes qu'il donne dans ſon excellent Mémoire, pour réuſſir daus cette opération délicate.

1°. Il faut prendre des barreaux dont les forces ſoient à très-peu près égales, & qui ſoient plus larges que la lame qu'on veut aimanter; il faut placer la lame de façon, que l'excès de la largeur du barreau ſoit égale des deux côtés, afin de tâcher de donner des forces égales aux parties homogènes de la lame.

2°. Il faut poſer le milieu de l'intervalle qu'il y a entre les poles des barreaux, exactement ſur le point qu'on a déterminé pour centre magnétique, ou ſur le milieu de la lame.

3°. Aimantez alors la lame en queſtion, ayant ſoin de preſſer par-tout également, & de mouvoir les barreaux du mouvement le plus uniforme qu'il ſe pourra, en frottant chaque partie de la lame un nombre égal de fois. Ces deux précautions ſervent à rendre les poles égaux.

4°. Il faut frotter la lame un égal nombre de fois des deux côtés, & avec les mêmes précautions. Ce nombre de fois eſt aſſez arbitraire; je crois même qu'il eſt plus avantageux de frotter la lame d'abord dix fois d'un côté, puis dix fois de l'autre, & alternativement juſqu'au point de ſaturation: afin que la force pénètre également, &

& que les particules homogènes puiſſent obtenir des forces égales.

273... Quoiqu'on ait aimanté une aiguille avec toutes les précautions requiſes, dit M. *Van-Swinden*, il eſt encore indiſpenſable d'en faire un examen ſcrupuleux ; il faut ſur-tout s'aſſurer qu'elle n'a que deux poles. Le moyen le plus ſimple de s'en aſſurer, c'eſt de répandre de la limaille ſur une glace qui couvre la lame, & de voir combien de centres magnétiques elle indique... On fait la même choſe pour conſtater le centre magnétique de l'aiguille ; on répand de la limaille ſur une glace qui la couvre, & le centre commun de toutes les courbes eſt le centre magnétique.

274... Les altérations fréquentes auxquelles les aiguilles ſont ſujettes, ſur-tout à la mer, les changemens ſubits & violens qu'elles éprouvent par des accidens extraordinaires, comme le grand froid, les coups de foudre, les aurores boréales, &c. (1), toutes ces circonſtances, &

(1) Il ſeroit ſuperflu de rapporter ici tous les faits qui prouvent que les aiguilles aimantées peuvent être altérées par des cauſes extérieures. Je me contenterai de celui qui ſuit, tiré de la nouvelle Encyclopédie, t. I de la MARINE.

« Dans les Mémoires de Stockolm, traduits par M. » *de Keralio*, chevalier de Saint-Louis, alors Capitaine » Aide-Major à l'Ecole-Militaire, on lit, page 190, » qu'une bouſſole, couverte d'un verre à l'ordinaire, » ayant été expoſée au ſoleil pendant quelque tems, » on s'apperçut que la direction de l'aiguille étoit dé-

autres qu'on ne sauroit prévoir, sont autant de motifs assez puissants pour engager les Marins à se munir, dans un voyage de long cours, de deux paires de barreaux magnétiques, afin d'être en état de retoucher les aiguilles des boussoles, & de pouvoir se servir d'un de ces aimans pour renouveller réciproquement la vertu magnétique des autres, s'ils venoient à perdre de leur force.

III.

275..: Les Physiciens ont employé jusqu'ici deux méthodes pour la suspension des aiguilles; la première, c'est de percer l'aiguille même d'un trou propre à recevoir la chappe. Cette méthode, dit M. *Van-Swinden*, est presque universellement adoptée : elle est cependant très-mauvaise; car premièrement le trou dont on la perce, rend la force des parties irrégulière, & même peut produire plusieurs poles, ce qui est très-désavantageux (1). Secondement il n'est pas

---

» rangée de plusieurs degrés. Ayant soupçonné que l'é-
» lectricité communiquée au verre par les rayons du
» soleil, étoit cause de ce dérangement, on passa légè-
» rement le doigt sur ce verre, & l'on vit l'aiguille suivre
» le doigt«. On pourroit citer, à l'appui de ceci, les nouvelles expériences que M. *Coucy Des-Essarts* a faites sur le même objet; mais ce seroit passer les bornes que nous nous sommes prescrites.

Les Navigateurs doivent donc bien prendre garde que dans les observations qu'ils font à bord ou à terre, leurs boussoles ne soient exposées aux rayons du soleil.

(1) Les expériences de M. *Coulomb*, & celles de M.

possible, ou du moins il est très-difficile de faire coïncider le centre de mouvement avec le centre de gravité.

La seconde méthode consiste à ne pas percer l'aiguille. MM. *Knignht*, *Leiher*, *Kotelnikow* & *Anthaume*, en ont fait usage, ainsi que M. *Lous* dans ses aiguilles composées. M. *Knignht* applique la chappe sous la rose, & l'aiguille au-dessus. M. *Anthaume* recommande de la couder en arc de cercle, & de terminer l'arc par un morceau de cuivre ou d'argent, afin de former un vide où l'on puisse placer une chappe qui doit porter le pivot.

La perfection de la suspension consiste, selon M. *Van-Swinden*,

1°. A faire coïncider le centre de mouvement avec le centre magnétique, avec une telle précision, que l'erreur, s'il y en a, ne monte tout au plus qu'à $\frac{1}{10}$e de ligne.

2°. A diminuer le frottement autant qu'il est possible : ce dernier article regarde sur-tout le style & la chappe.

On sait qu'anciennement le style étoit de cuivre. Cette pratique est encore en usage sur nos vaisseaux ; il est cependant aisé de sentir qu'il en doit résulter un frottement très-considérable, & que le poids des lames dont il convient de faire les aiguilles des boussoles à l'usage de la

---

Blondeau, ont prouvé qu'alors le magnétisme de l'aiguille n'est nullement altéré par cette ouverture. (Voy. *la nouvelle Encyclop. t. I. de la* MARINE.)

navigation, doit émousser promptement la pointe de ces styles. Aussi tous les Physiciens les rejettent-ils actuellement avec raison.

M. *Michell* préfère les styles d'argent ou d'or, qu'on a soin de rendre très-durs par beaucoup d'alliage. Ces métaux ne sont pas sujets à la rouille, & semblent fournir une matière très-propre, à tous égards, à faire des styles.

Pour les chappes, MM. *Michell* & *Lemonier* donnent la préférence au verre sur l'agathe, parce que le verre est plus dur, & admet un poli parfait.

Du Sillage du vaisseau, & de la manière de le mesurer.

276... On a imaginé de tout tems divers moyens de mesurer le *sillage*, c'est-à-dire, la vîtesse de la marche d'un vaisseau, afin de suppléer par-là à la connoissance des longitudes; car on conçoit que si l'on réduit en degrés la distance parcourue, connoissant d'ailleurs la direction de la route, on pourra conclure à-peu-près la longitude du vaisseau, sur-tout s'il a couru directement à l'Est ou à l'Ouest. Il étoit donc important de savoir mesurer son sillage, & c'est à quoi on s'est attaché particulièrement dès les premiers progrès de la navigation; mais comme tous les moyens qu'on a mis jusqu'ici en usage, supposent nécessairement un point fixe & presque impossible à obtenir sur la surface de la mer,

d'où l'on puisse compter l'espace parcouru, il suit donc que la mesure du sillage n'est qu'une estime vague & peu exacte de la marche d'un vaisseau. Cette estime, toute grossiere qu'elle est, dépend encore de la force du vent, du nombre des voiles, & de la manière dont elles sont orientées: tout cela demande beaucoup de discernement & d'expérience; d'ailleurs les vaisseaux ne vont pas tous avec la même vîtesse; la différence dans la forme de leur construction & dans la manière dont ils sont appareillés & arrimés, fait que les uns sont meilleurs voiliers que les autres, & que tel qui va très-bien vent-arrière, ne sauroit aller à la bouline. Toutes ces circonstances, & beaucoup d'autres que la pratique seule peut faire connoître, prouvent combien il est difficile d'estimer le sillage d'un vaisseau.

Il y a des pilotes qui, pour connoître le sillage du navire, se contentent de laisser tomber de la proue, & du côté opposé au vent, un petit morceau de bois, & de marquer le nombre de secondes de tems qu'il met à passer de l'avant à l'arrière. D'autres, pour faire la même estime, comptent le nombre de secondes que l'écume de la mer emploie à parcourir la longueur du navire. Les uns & les autres, connoissant la durée de l'expérience & la longueur du vaisseau, déterminent le chemin qu'il fait par heure, en cherchant le quatrième terme de cette proportion.

FIG.

Le nombre de secondes que le morceau de bois, ou l'écume de la mer, met à parcourir la longueur du vaisseau,
Est au nombre des pieds de sa longueur,
Comme 3600''. qu'il y a dans une heure,
Est au nombre des pieds parcourus par le navire dans l'espace d'une heure.

Ces différens moyens, & beaucoup d'autres de cette espèce, ne sont fondés que sur une longue expérience, & reviennent tous à celui du *lock*, dont on se sert le plus ordinairement, & dont nous allons donner une description détaillée.

73 277... Le *lock*, ou *bateau de lock*, est un morceau de bois auquel on donne pour l'ordinaire la figure d'un triangle isoscelle, ou d'un cône de sept à huit pouces de hauteur, comme on peut le voir par la *fig.* 73e. Sa base AB, qui est plus petite que les deux autres côtés, regarde le fond de la mer; elle est chargée d'un peu de plomb, tant pour faciliter au lock le moyen de prendre une position verticale, que pour le faire plonger jusqu'à sa pointe, afin d'ôter toute prise au vent. C'est à cette pointe qu'est attachée une longue ficelle, divisée en parties égales par des nœuds. A peu de distance du lock, comme en D, il part un autre bout de ficelle, qui sert à maintenir l'instrument dans sa position verticale, & qui peut s'en séparer aisément,

lorſqu'on le retire à ſoi, parce qu'elle n'y tient qu'à l'aide d'une cheville qui ſe détache au moindre effort.

Pour faire uſage du lock, on le jette à la mer par la pouppe du côté oppoſé au vent, & on lâche la ficelle à meſure que le vaiſſeau fait route. La longueur de la ficelle fait juger de la diſtance parcourue. Cette expérience ne dure ordinairement qu'une demi minute ou 30″ de tems, qu'on détermine d'une manière préciſe, à l'aide d'un ſablier qui eſt exactement de la même durée; mais il faut qu'un pilote ait ſoin de le vérifier avant de partir, parce que le ſable, en coulant, uſe le trou qui eſt entre les deux empoulettes, & l'aggrandit inſenſiblement. Cette vérification, qu'on doit répéter de tems en tems, afin de n'être pas induit en erreur, peut ſe faire dans les relâches de la manière ſuivante.

278... Suſpendez une balle de plomb de trois ou quatre lignes de diamètre, à l'extrémité d'un fil de pite, de ſoie plate, ou même d'un fil tors, que vous cirerez, pour l'empêcher de ſe détordre & par conſéquent de s'allonger; faites paſſer l'autre bout du fil par une fente pratiquée dans quelque corps ſolide & fixe; meſurez enſuite exactement, entre le point de ſuſpenſion & le centre de la balle, 36 pouces 8 lignes $\frac{1}{2}$ de longueur (1); faites-la balancer légèrement, en ne lui faiſant parcourir d'abord

---

(1) Cette longueur du pendule eſt celle qui convient

que des arcs de trois ou quatre pouces, chacune de ses vibrations simples sera exactement d'une seconde de tems. Ainsi en comparant la durée du sablier avec trente vibrations simples de ce pendule, on verra s'il dure exactement une demi-minute, ou de combien il en diffère. Si l'on vouloit que chaque vibration ne fût que d'une demi-seconde, on ne donneroit au fil que le $\frac{1}{4}$ de sa longueur, c'est-à-dire, 9 p. 2 lig. $\frac{1}{8}$.

279... Il faut observer que puisqu'on veut que le lock reste immobile sur la surface de la mer, on ne commence pas à compter les 30″ que dure l'expérience, du moment qu'on le jette à la mer : on attend qu'il soit éloigné de la pouppe d'une quantité égale à la longueur du

---

au parallèle de Paris ; mais quand la latitude differe de beaucoup en plus ou en moins, il faut augmenter ou diminuer sa longueur. La diminution, par exemple, doit être d'autant plus grande, que le lieu où l'on se trouve, est plus près de l'équateur, parce qu'en vertu du mouvement diurne de la Terre ; la force centrifuge augmentant des poles à l'équateur, doit nécessairement diminuer dans le même rapport la pesanteur de tous les corps à la surface de la Terre, & par conséquent la longueur du pendule.

Voici les longueurs du pendule observées par les Académiciens, qui ont travaillé à la figure de la Terre.

Long. du pend.	de 36 p. 7 l. 07...	sous l'équateur	
	de 36. 7, 16...	à Porto-Belo	9°. 34′. lat. N.
	de 36. 7, 33...	à l'I. St.-Domingue..,.	18. 27. lat. N.
	de 36. 8, 07...	au C. de Bonne-Espér.	33. 35. lat. S.
	de 36. 9, 17...	à Pello, vil. Finois.....	66. 48. lat. N.
	de 36. 8, 71...	à Leyde, p. M. *Lulofs*,	52. 9. lat. N.

navire, & tout-à-fait hors de cette eau extrêmement agitée, qu'on nomme le *remoux*. Il y a une marque sur la ficelle pour déterminer cette longueur, & c'est lorsqu'on y parvient, que celui qui le jette avertit par le mot *vire*, de tourner le sablier; & celui-ci, par le mot *stop*, donne au premier le signal d'arrêter le lock, lorsque le sablier finit. Pendant l'expérience, il est essentiel que le pilote ne perde point de vue le bateau de lock, afin de lâcher à propos la ficelle, de manière qu'elle soit tendue sans l'être trop.

La ficelle est divisée en parties égales par des nœuds, afin qu'on puisse les compter la nuit comme le jour. Leur grandeur ou leur distance a un rapport déterminé avec la lieue marine; elle en est la 360e. partie, ou bien la 120e. partie d'un tiers de lieue; en sorte que la lieue marine étant de 2851 toises $\frac{1}{2}$ = 17109 pieds, si l'on en prend la 360e. partie, on aura 47 pieds $\frac{1}{2}$ pour la distance de chaque nœud. Or comme l'expérience dure une demi-minute, & que dans une heure il y a 120 demi-minutes, durant lesquelles le vaisseau, allant toujours avec la même vîtesse, doit faire 120 fois autant de chemin, il s'ensuit donc que pour chaque nœud qui aura été filé durant l'expérience, le navire doit faire 120 fois autant de chemin par heure; c'est-à-dire, un tiers de lieue marine.

280... Ce résultat seroit exact, si le lock restoit à la surface de la mer aussi immobile qu'on est obligé de le suppposer; mais soit que la ligne du lock souffre quelque frottement, malgré les

précautions que l'on prend pour la développer avec la main, soit que le mouvement de l'eau, qui est très-sensible près du navire, tende à rapprocher du bord la partie de la ligne qui en est la plus voisine, soit enfin pour toute autre cause qu'on ne sauroit bien démêler, la plupart des Marins conviennent qu'en laissant 47 p. $\frac{1}{2}$ entre les nœuds, ils trouvent presque toujours trop peu de chemin. Les expériences qui ont été faites par ordre du Gouvernement (1) sur un objet aussi important, ont confirmé ce qui avoit été déja reconnu, & ont fait voir en même tems qu'il ne falloit mettre que 45 pieds entre les nœuds. Cette correction doit être admise aujourd'hui par tous les Marins qui se piquent d'exactitude dans la pratique de leur art.

281... Comme la ficelle ou ligne de lock est sujette à se raccourcir & à s'allonger par l'humidité & la sécheresse, il faut qu'un pilote attentif ait soin de la vérifier de tems en tems, afin d'en tenir compte lorsqu'il apperçoit quelque changement; si, par exemple, elle s'étoit allongée de $\frac{1}{30}$, il faudroit diminuer de la même quantité le nombre des nœuds qu'on auroit filés pendant l'expérience, parce qu'autrement on estimeroit le chemin parcouru de $\frac{1}{30}$ plus grand qu'il n'est réellement.

282... Pareillement, si en vérifiant le sablier de la manière indiquée ci-dessus, on trouvoit que sa durée est plus longue de 3″ qu'elle ne

(1) Par MM. le Chev. *de Borda*, *Verdun* & *Pingré*, sur la frégate *la Flore*.

doit être, il eſt évident qu'alors on fileroit plus de nœuds à chaque expérience, puiſqu'elle dureroit 3″ de plus. Je ſuppoſe qu'en ſe ſervant d'un ſablier affecté de cette erreur, on ait filé onze nœuds, pour ſavoir combien on en auroit filés pendant 30″, on chercheroit le quatrième terme de cette proportion;

$$33'' : 30'' :: 11 : x = 10$$

c'eſt-à-dire, que ſi le ſablier avoit duré exactement 30″, on auroit filé dix nœuds au lieu de onze.

On voit donc que les erreurs, quelque petites qu'elles ſoient, ſont ici d'autant moins à négliger, que la durée de l'expérience eſt par elle-même très-courte, & que la diſtance des nœuds eſt infiniment petite par rapport à la longueur de la lieue marine; de ſorte que la plus petite erreur doit néceſſairement tirer à conſéquence.

« Avec ces ſoins, dit M. *Bézout*, & en obſervant de répéter l'expérience auſſi ſouvent » que le vaiſſeau paroîtra changer de vîteſſe, » on pourroit faire une eſtime du ſillage ſuffiſamment exacte, ſi le bateau de lock pouvoit » être regardé comme fixe; mais il n'en eſt pas » ainſi pour pluſieurs cauſes, dont les effets ſont » fort variables & peu connus. La mer eſt ſujette à des mouvements particuliers, dont la » direction & la vîteſſe n'ont rien de conſtant. » Les courants qui naiſſent de ces mouvements, » donnent au navire une vîteſſe que le lock ne » fait pas découvrir, puiſqu'il la reçoit auſſi;

» en ſorte qu'il ne fait connoître que le mouve-
» ment du vaiſſeau par rapport à la mer, & non
» le mouvement à l'égard de la terre, qu'il im-
» porte véritablemont de connoître.

» Il y a quelques courants dont la direction,
» ainſi que la vîteſſe, ſont aſſez bien connus.
» On ſait, par exemple, qu'à l'équateur, & à
» quelque diſtance de part & d'autre, la mer ſe
» meut vers l'Occident, & forme un courant
» perpétuel, dont la vîteſſe eſt d'environ trois
» lieues par jour. Mais il en eſt une infinité
» d'autres qui, ne tenant pas à des cauſes auſſi
» générales & auſſi régulières, laiſſeront tou-
» jours beaucoup d'incertitude ſur le ſillage.
» Tels ſont, par exemple, les mouvements que
» la mer peut prendre lorſque le vent a ſoufflé
» pendant un certain tems vers un même côté.
» On ne peut douter que ſa ſurface & les parties
» voiſines ne prennent une certaine partie de la
» vîteſſe du vent; mais quelle eſt cette partie?
» Combien ne peut-elle pas varier dans le voi-
» ſinage des terres par la poſition des côtes?
» Comment reconnoître ſi elle n'eſt pas jointe à
» quelques autres mouvements occaſionnés par le
» vent qui a régné auparavant, ou par toute
» autre cauſe, &c.? Sur ce point l'expérience
» doit être beaucoup conſultée, & peut-être ſera-
» t-elle toujours le ſeul guide «.

283... Le ſillomètre, nouvellement inventé par M. *de Gaulle*, vient heureuſement de mettre fin à ces incertitudes. L'inventeur, en perfectionnant les moyens employés par M. *Bouguer*

FIG.

pour suppléer à l'insuffisance du lock, a été encore plus loin ; il a trouvé celui de déterminer avec son nouvel instrument, non-seulement la marche du navire, mais encore sa dérive ; avantages précieux que n'avoient aucuns des instruments qui avoient été proposés en différens tems pour le même objet. Les expériences qu'on a faites du sillomètre, par ordre du Gouvernement & l'approbation de l'Académie des Sciences, ne laissent aucun doute sur le succès de cette invention, dont l'usage est tout-à-la-fois commode & à la portée de tous les navigateurs.

Principes fondamentaux de la réduction des Routes.

284... Puisque la figure de la Terre est sphérique, ou à très-peu-près sphérique, il est évident que les rumbs de vent ne peuvent être représentés que par des lignes courbes, soit parce qu'ils sont tracés sur une surface courbe, soit parce qu'ils font constamment le même angle avec tous les méridiens qu'ils rencontrent sur la surface du globe. La ligne courbe ou spirale RTZX, par laquelle on les représente, s'appelle *loxodromie*. Un vaisseau qui suivroit constamment le même rumb de vent, décriroit sur mer une pareille courbe, & s'approcheroit de plus en plus du pole, sans pouvoir y arriver, excepté dans le cas où il cingleroit directement au Nord ou au Sud. 74.

285... Si en partant du point R, par exemple,

FIG. il ſuivoit une route oblique, comme celle du N-E, qui fait un angle de 45°. avec le méridien du départ AP, étant arrivé ſur le méridien
74 CP, l'aiguille de la bouſſole ne prendroit pas une direction parallèle à celle qu'elle avoit au point R; elle ſe détourneroit un peu en (*r*) pour faire un angle de 45°. avec ce nouveau méridien. La même choſe auroit lieu ſur tous les autres méridiens DP, EP, FP, &c. de la route. En un mot, puiſque la vertu de l'aimant eſt de ſe diriger au Nord, l'aiguille aimantée ſuivroit le ſens des méridiens qui vont tous ſe réunir aux poles; de ſorte qu'à meſure que le vaiſſeau avanceroit dans la même direction, le rumb de vent ſe détournant infiniment peu à chaque pas, la trace de ſa route ſur la ſurface de la mer ſeroit la ligne courbe RTZ, qui fait une infinité de détours en s'approchant continuellement du pole.

286... Ce que nous venons de dire, n'eſt pas plus particulier au N-E, qu'à tout autre rumb de vent qui fait un angle oblique avec le méridien. On voit par-là qu'un navire qui cingleroit directement à l'Eſt ou à l'Oueſt, décriroit néceſſairement l'équateur ou un parallèle à l'équateur, parce que la direction de ſa route étant perpendiculaire à chaque méridien, il ſe trouveroit à chaque pas à la même diſtance des poles; mais pour peu qu'il ſe détournât à droite ou à gauche de cette direction, il décriroit une courbe loxodromique.

287... Examinons maintenant les propriétés

de cette courbe, qui servent de fondement à la réduction des routes.

Supposons que RT soit le rumb de vent qu'on a suivi pendant un certain tems, que P soit le pole Nord, AG un arc de l'équateur, il est clair 74 que RT représentant la route du navire, si du pole comme centre on décrit les arcs ST, RO, parallèles à l'équateur, RS exprimera la différence en latitude; c'est-à-dire, la quantité dont on a avancé au Nord, depuis le point du départ R, jusqu'au point d'arrivée T; & ST, qui représente la différence en longitude, aura pour mesure l'arc AG de l'équateur; c'est-à-dire, la quantité dont on a avancé en même tems vers l'Est ou vers l'Ouest. La figure RST, qui représente les élémens de cette route, est à la vérité un triangle sphérique, parce qu'il est tracé sur la surface convexe de la mer; mais si l'on conçoit que la courbe RT, qui marque la longueur de la route, est divisée en parties très-petites & égales entr'elles, chaque petit triangle, tel que (*rst*) rectangle en (*s*), pouvant être regardé comme rectiligne, chaque côté (*rs*) sera la différence en latitude de cette portion de la route; & chaque côté (*st*) représentant la différence en longitude, aura pour mesure l'arc correspondant de l'équateur, parce que c'est sur l'équateur qu'on mesure le chemin fait sur la ligne Est & Ouest. Toutes les parties telles que (*rt*) étant égales entr'elles, tous les petits triangles rectilignes qu'on peut imaginer, construits sur la ligne RT, seront aussi égaux entr'eux;

FIG. parce qu'outre l'hypotheneuse & l'angle droit, qui sont les mêmes pour chacun, ils auront de plus le même angle du rumb de vent : donc le troisième sera nécessairement égal.

288... Cela posé, puisque la longueur de la route RT est égale à la somme de toutes les hypotheneuses (*rt*), & que RS est égal à la somme de tous les petits côtés (*rs*), à cause des rapports égaux formés des parties de RT & des parties correspondantes de RS, on aura cette proportion :

La somme de tous les antécédents RT
est à la somme des conséquents RS,
comme un antécédent rt
est à son conséquent rs.

75 289... Donc si l'on construit un triangle rectiligne ABC rectangle en B, dont l'angle A soit égal à l'angle du rumb de vent SRT, & l'hypopotheneuse AC égale à la longueur de la route RT, ce triangle rectiligne sera en tout semblable au petit triangle loxodromique (*rst*), & l'on aura :

AC : AB : : *rt* : *rs*; ou : : RT : RS.

On voit donc que, quoique les élémens de cette route soient des lignes courbes, on peut néanmoins les représenter par des lignes droites, & déterminer, par une simple opération graphique, de combien on a avancé au Nord.

290... En employant le calcul trigonométrique, on obtiendra toujours un résultat plus exact

exact & plus prompt ; c'est pourquoi il doit être préféré aux méthodes graphiques. Dans cet exemple, connoissant l'hypotheneuse, l'angle droit & celui du rumb de vent qu'on a suivi pour trouver la différence en latitude, on cherchera le quatrième terme de cette proportion :

Le rayon
est au co-sinus du rumb de vent,
comme l'hypotheneuse ou la longueur de la route
est au nombre de lieues de la différence en latitude.

Ce nombre de lieues, réduit en degrés & parties de degré, donnera la grandeur de l'arc du méridien, qui exprime la différence en latitude.

291... Quant à la différence en longitude, elle ne peut pas se conclure aussi immédiatement de l'estime du chemin fait à l'Est ou à l'Ouest, parce que, la route RT étant oblique, la longueur de ce chemin dépend de la grandeur variable de différents parallèles sur lesquels on a couru successivement depuis le point du départ, jusqu'au point d'arrivée. Ainsi, quoique le côté BC du triangle ABC représente la somme de toutes les parties (*st*) de la différence en longitude, on se tromperoit si, ayant vu que le côté AB est égal à RS, on en concluoit que BC est aussi égal à ST ou à RO. Il est visible que BC doit être plus grand que ST, & plus petit 74

FIG. que RO, puiſque (*st*) eſt lui-même plus grand que HI, & plus petit que LK. Pour parvenir à
74 réſoudre cette difficulté, envisageons tout autrement la queſtion.

292... Si l'on conſidere deux routes obliques compriſes entre les mêmes parallèles, on s'appercevra aiſément que les différences en longitude qui leur conviennent, ſont entr'elles, comme les tangentes des angles du rumb de vent; de ſorte que ſi la direction de l'une de ces routes, fait un angle de 45°. avec le méridien du départ, & celle de l'autre un angle de 33°., la différence en longitude de la première ſera à la différence en longitude de la ſeconde, comme la tangente de 45°. eſt à la tangente de 33°. Ce rapport eſt conſtant, quelque ſoit l'obliquité de ces routes. Quand même on réduiroit leur différence en longitude ſur le parallèle qui paſſe à égale diſtance de part & d'autre, cette réduction ne changeroit rien à ce rapport, puiſque ce moyen parallèle ſeroit le même pour chacune de ces routes.

293... Donc, ſi l'on calculoit la différence en longitude qui convient à l'obliquité d'une route, comme à celle du N-E, ou de 45°., pour toutes les minutes du quart de cercle du méridien, & qu'on diſposât tous ces nombres en colonne, on pourroit, à l'aide de cette table, connoître la différence en longitude qui convient à toute autre route, en cherchant le quatrième terme de cette proportion.

FIG.

La tangente du N-E ou de 45°. = au rayon,
est à la tangente de tout autre rumb de vent,
comme la différence en longitude qui répond au N-E dans la table,
est à la différence en longitude qui convient à la route calculée.

294... Pour construire cette table, il suffiroit seulement de supposer, comme nous l'avons fait, que la loxodromie RT, qui représente la route du N-E, est divisée en parties égales, correspondantes à chaque minute de difference en latitude. Alors tous les petits triangles loxodromiques (*rst*) seront parfaitement égaux; mais à mesure qu'on avancera vers le pole, les parties AB, BC, CD, &c. de l'équateur, qui marquent les petites différences en longitude correspondantes aux côtés (*st*), augmenteront d'autant, que le rayon de l'équateur sera plus grand que le co-sinus de la latitude, ou d'autant que la secante de la latitude sera plus grande que le rayon de l'équateur (254). Donc, en supposant (*st*) d'une minute, pour avoir la différence en longitude correspondante, on calculeroit le quatrième terme de cette proportion : 74

Le rayon
est à une minute d'un parallèle quelconque,
comme la secante de la latitude de ce parallèle,
est au petit arc de l'équateur, qui exprime la différence en longitude correspondante.

295... Donc, si l'on prend successivement

toutes les ſecantes naturelles de minute en minute, & qu'on les diviſe par le rayon, on aura les différences en longitude exprimées en minutes pour le N-E. C'eſt en effet de cette manière qu'on a calculé la table des latitudes croiſſantes, dont nous avons déja parlé à l'article (256) des Cartes réduites. Cette table a donc deux avantages ; celui d'exprimer par les mêmes nombres l'étendue qu'on doit donner aux degrés du méridien dans les Cartes réduites, & les différences en longitude pour le N-E.

296... Lors donc qu'on voudra s'en ſervir pour trouver la différence en longitude qui convient à une autre route, dont l'obliquité eſt plus ou moins de 45°., on prendra la différence ou la ſomme des minutes correſpondantes à la latitude de départ & d'arrivée de cette route, ſelon que les deux latitudes ſeront de même ou de différente dénomination, & on aura ainſi la différence en longitude pour la route du N-E, qui conduiroit du point du départ au point d'arrivée ; enſuite pour avoir la différence en longitude qui convient à la route que l'on calcule, il n'y aura qu'à faire la proportion ci-deſſus (293).

Soit propoſé, par exemple, de trouver la différence en longitude qui convient à la route N-N-O, compriſe entre 40°. 20′ & 48°. 30′ de latit. Nord.

Dans la table des latitudes croiſſantes, on trouve, à côté de ces deux latitudes, 2649′ & 3337′, dont la différence 688′, puiſque ces

deux latitudes sont de même dénomination, exprime la différence en longitude pour le N-E. Ensuite pour avoir celle qui convient au N-N-O, qui fait avec le méridien un angle de 22°. 30', on cherchera le quatrième terme de cette proportion : FIG.

R : tang. 22°. 30' : : 688' : 285',

qui est la différence en longitude pour le N-N-O. 75

On pourra donc déterminer la différence en longitude de la route d'un navire, par le moyen d'un triangle rectiligne rectangle, tels que ABC, dont l'angle A soit égal à l'angle du rumb de vent qu'on a suivi, & dont le côté AB soit égal à la différence ou à la somme des latitudes croissantes d'arrivée & de départ; alors le troisième côté BC exprimera la différence en longitude.

TROISIEME SECTION.

De la manière de résoudre différens Problêmes de navigation sur les Cartes réduites.

297... Quoique la plupart des opérations qu'on peut faire sur les Cartes marines soient communes aux plates & aux réduites, nous nous attacherons uniquement à enseigner la manière de pointer celles-ci, parce que, vu le principe de leur construction, ce sont les seules dont on puisse attendre quelque exactitude dans ces sortes d'opérations.

PROBLÊME I.

298... *Trouver la latitude & la longitude d'un lieu ſitué ſur la Carte.*

1°. Menez, par le lieu propoſé, une parallèle à la ligne Eſt & Oueſt, juſqu'à la rencontre des deux méridiens gradués, qui ſont à droite & à gauche de la Carte; cette parallèle marquera ſur les diviſions du méridien la latitude du lieu propoſé.

2°. Pour avoir ſa longitude, menez, par le lieu propoſé, une parallèle à la ligne Nord & Sud, juſqu'à la rencontre des lignes graduées, qui ſont en haut & au bas de la Carte, leſquelles repréſentent l'équateur ou des parallèles à l'équateur, & qu'on nomme pour cette raiſon *échelles de longitude.* Cette ligne parallèle marquera ſur cette échelle la longitude du lieu propoſé.

EXEMPLES.

Lat.	de l'I. d'Oueſſant *au fanal* eſt de	48°. 28′	..0″	N
	du Cap de la Hague	49. 44	...0	N
	du port de Cherbourg	49. 38	...0	N
	du port Mahon, *fort S. Philip.*	39. 50	...0	N
Long.	de l'I. de Jerſey; *cl. S. Laurent.* .	4°. 31′	..0″	O
	du port de Cherbourg	3. 58	...0	O
	du Cap Lézard	7. 32	...0	O
	du Cap Finiſtere	11. 38	...0	O

PROBLÊME II.

299... *Connoiſſant en mer la latitude & la longitude d'un lieu, trouver ce lieu ſur la Carte.*

Ce problême n'étant que l'inverse du précédent, il est clair que si, par les points du méridien qui marquent la latitude de ce lieu, on mène une parallèle à la ligne Est & Ouest, & que par les divisions de l'équateur correspondantes à sa longitude, on mène une parallèle à la ligne Nord & Sud, l'intersection de ces deux lignes sera la position de ce lieu sur la Carte.

300... Mais comme il importe de ménager la Carte, afin d'en prolonger le service autant qu'il est possible, au lieu d'y tracer des lignes, on pourra se servir, pour le même usage, de deux fils un peu plus longs que l'étendue de la Carte, qu'on tendra suffisamment à l'aide d'un petit plomb attaché aux deux extrémités.

Lorsqu'il s'agira de construire sur la Carte réduite un triangle rectangle pour représenter les élémens de la route d'un navire, on disposera ces fils perpendiculairement l'un à l'autre, suivant la latitude & la longitude indiquées, ce qui formera les deux côtés de l'angle droit, aux extrémités desquels appliquant une règle, on aura l'hypotheneuse, & par conséquent la longueur de la route avec le rumb de vent qu'on a suivi.

Ainsi, à la place des parallèles à la ligne Nord & Sud, & à la ligne Est & Ouest, qu'on prescrira de tracer dans les détails de ces opérations, on substituera, pour plus de commodité dans la pratique, des fils tendus suivant la direction de ces mêmes lignes. Cette manière de pointer nous a paru plus exacte & plus facile que

celle qui se pratique ordinairement en se servant de deux compas.

PROBLÊME III.

301 ... *Trouver à quel rumb de vent deux lieux sont situés ;* c'est-à dire , *quelle est la direction de la route qui conduit de l'un à l'autre.*

Ayant porté une règle sur la ligne qui va de l'un à l'autre de ces lieux , on remarquera à quel rumb de vent de la rose la plus voisine cette règle se trouve parallèle , ce qu'on découvrira aisément à l'œil : c'est à cet air de vent que sont situés les deux lieux proposés. Si ce rumb de vent n'est pas marqué sur la Carte , on estimera à-peu-près de combien il s'en faut qu'il ne soit parallèle à la ligne de la rose qui en approche le plus ; la précision est suffisante , lorsque l'estime ne passe pas un demi-degré. Si l'on veut avoir ce rumb de vent avec plus de précision , on prendra , avec un grand rapporteur de corne placé au centre de la rose , l'angle formé par la ligne qui marque la direction des deux lieux ; & par celle du rumb de vent , le plus voisin du côté du Nord ou du côté du Sud. La valeur de cet angle , ajoutée au rumb de vent le plus voisin , sera le rumb de vent cherché.

EXEMPLES.

Le cap Lézard est situé au N$\frac{1}{4}$N-O 3°. Nord par rapport à l'île d'Ouessant , & la position de

l'île d'Oueſſant eſt par conſéquent au S$\frac{1}{4}$S-E 3°. Sud par rapport au cap Lézard.

La pointe méridionale de l'île de Wight eſt au N-N-E 1°. Eſt du cap de la Hague.

D'Oueſſant au cap Finiſtere, la route eſt S-O$\frac{1}{4}$S.

De la pointe orientale de Belle-Ile à la tour de Cordouan, la direction de la route eſt S E$\frac{1}{4}$S.

PROBLÊME IV.

302... *Trouver ſur la Carte la diſtance qu'il y a d'un lieu à un autre.*

Il faut prendre pour échelle de 20 lieues marines la grandeur du degré du méridien qui ſe trouve au milieu, entre la latitude des deux lieux propoſés, porter la grandeur de ce degré moyen ſur la droite qui marque la diſtance de ces lieux ſur la Carte, autant de fois que cette grandeur y eſt contenue; réduire en lieues ce nombre de degrés, & on aura la diſtance demandée.

C'eſt ainſi qu'on a trouvé que

La diſt. { de Cherbourg à Porſtmouth eſt de 24 l. $\frac{1}{3}$
de l'I. d'Oueſſant à Douvres .... 95 $\frac{2}{3}$
de Marſeille au port Mahon .... 70 $\frac{2}{3}$

303... Mais lorſqu'il s'agira de deux lieux très-éloignés l'un de l'autre, pour avoir leur diſtance avec plus de préciſion, on tracera ſur la Carte un triangle rectangle, dont l'hypothe-

FIG. neuse soit la ligne droite qui joint ces deux lieux, & dont les deux autres côtés soient deux perpendiculaires; l'une parallèle à la ligne N & S, exprimant la différence en latitude de ces lieux; & l'autre, parallèle à la ligne E & O, exprimant leur différence en longitude. Ce triangle étant construit, voici de quelle manière on déterminera la distance vraie de ces deux lieux.

PROBLÊME V.

76 *Soit proposé pour exemple de trouver la distance entre la tour de Cordouan, dont la latitude est de 45°. 35′ N, & la longitude de 3°. 30′ O; & la pointe S-E de l'île Saint-Michel, une des Açores, dont la latitude est de 37°. 39′ N, & la longitude de 27°. 28′ O.*

Après avoir construit sur la Carte le triangle rectangle ABC, dont le point A représente ici la tour de *Cordouan*, le point C l'île *Saint-Michel*, le côté AB leur différence en latitude, qui est de 7°. 56′, & BC leur différence en longitude, on mesurera les 7°. 56′ sur l'échelle des longitudes; & prenant leur grandeur marquée sur cette échelle, on la portera sur la droite AB; du point I où elle se termine, on menera une parallèle à la base du triangle, laquelle coupera l'hypotheneuse en un point quelconque H. Alors portant la grandeur AH sur l'échelle des longitudes, on trouvera qu'elle répond à 19°. 34′, qui donnent 391 lieues $\frac{1}{3}$ pour la distance

FIG.

vraie entre la tour de Cordouan & l'île Saint-Michel.

304... Pour sentir la raison de cette opération, il faut se rappeller qu'en vertu du principe qui donne lieu à la construction des Cartes réduites, la distance respective de tous les lieux, 76
ainsi que la grandeur des degrés du méridien, doivent y croître progressivement depuis l'équateur, jusqu'aux poles. Donc si l'on dépouille de cette augmentation le nombre des degrés du méridien qui expriment la différence en latitude des deux lieux, en les ramenant à ceux de l'équateur; c'est-à-dire, à leur valeur primitive, l'hypotheneuse AC, réduite par cette opération à la grandeur AH, exprimera la distance réelle demandée.

De sorte que BI, dans cet exemple, est la quantité qu'il faut retrancher sur les degrés du méridien de la Carte, pour que ces degrés soient égaux à ceux de l'équateur; par la même raison CH est toute la quantité dont la distance AC doit être diminuée proportionnellement à BI.

Nous nous servirons de cette méthode dans la résolution des autres problêmes, sur-tout pour les grandes distances.

PROBLÊME VI.

305... *Déterminer sur la Carte le point de départ, ainsi que le lieu de la mer où l'on se trouve à la vue de deux terres.*

Avant de perdre la terre de vue, les Marins

ſont dans l'uſage de relever avec le compas de variation deux objets remarquables ſur la côte; puis ils menent ſur la Carte, par chacun de ces deux points, une ligne parallèle au rumb de vent ſur lequel chacun a été apperçu. Le point de rencontre de ces deux lignes détermine celui de leur départ, & le lieu de la mer où ils ſont au moment où ils vont perdre la terre de vue. C'eſt de ce point qu'ils commencent à compter leur navigation.

Il arrive quelquefois qu'on ne peut relever qu'un ſeul objet, ce qui n'eſt pas auſſi sûr que d'en relever deux; mais on y eſt forcé toutes les fois qu'on part d'une petite île iſolée au milieu de la mer, laquelle, à une certaine diſtance, ne préſente à la vue qu'un ſeul point.

EXEMPLES.

Suppoſons qu'un navire qui eſt au large dans la mer, puiſſe appercevoir la tour de Cordouan & la pointe méridionale de l'île d'Oleron; que le premier de ces objets ſoit par rapport à lui à l'E-S-E, & le ſecond au N-E$\frac{1}{4}$E. Pour déterminer ſur la Carte le lieu du navire & ſa diſtance à ces deux objets, il ſuffit de mener par la tour de Cordouan une parallèle à la ligne qui marque l'E-S-E, & par la pointe méridionale de l'île d'Oleron, une autre parallèle au N-E$\frac{1}{4}$E. La rencontre de ces deux parallèles ſera le lieu du navire en mer; enſuite, ſe conformant au quatrième Problême pour déterminer la diſtance de

ces deux objets, on trouvera que la tour de Cordouan eſt éloignée de cinq lieues du navire, & que la pointe méridionale de l'île d'Oleron en eſt éloignée de quatre lieues $\frac{1}{2}$. FIG.

On a relevé le cap de la Hague au S-E$\frac{1}{4}$S, & la pointe ſeptentrionale de l'île d'Aurigni au Sud; on demande de trouver ſur la Carte le point où l'on eſt en mer.

Réponſe. Ce point eſt éloigné du cap de la Hague de quatre lieues $\frac{2}{3}$, & de la pointe ſeptentrionale de l'île d'Aurigni de trois lieues.

306... En calculant la diſtance à laquelle on peut porter ſa vue en pleine mer, lorſqu'on eſt élevé d'une certaine quantité au-deſſus de ſon niveau, on trouve, d'après le Théorême 15 de Géométrie, que lorſque l'œil eſt élevé de

5 pieds	l'horiſ. ſenſ. s'étend juſqu'à	2300 t.	$= \frac{4}{5}$	de lieue à-très-peu-près.
10 . .		$3258.\frac{1}{2}$	$= 1\frac{1}{7}$	
15 . .		$4043.\frac{1}{2}$	$= 1\frac{5}{12}$	
20 . .		4668...	$= 1\frac{2}{3}$	

PROBLÊME VII.

307... Connoiſſant le point de départ & celui de l'arrivée, on demande le rumb de vent qui conduit de l'un à l'autre, & les lieues de diſtance.

Suppoſons que le point de départ ſoit la tour de *Cordouan* dont on connoît la latitude & la longitude (303), & que le lieu, où l'on ſe propoſe d'aller, ſoit la pointe S-E de l'île *Saint-Michel*, une des *Açores*, dont la latitude & la longitude ſont auſſi connues (303); en ſe con- 76

formant à ce qui a été dit au Problême III & IV, on trouvera d'abord que le rumb de vent qui va en droite ligne de l'un à l'autre des deux lieux indiqués, est l'E-N-E 2°. Nord, & que leur distance est 391 lieues $\frac{1}{3}$, ainsi que nous l'avons vu dans le cinquième Problême.

308... Mais quoique nous disions que l'E-N-E 2°. Nord est le rumb de vent qui conduit directement de la tour de Cordouan à l'île Saint-Michel, ce n'est pas à dire que pour se rendre d'un lieu à un autre, il faille toujours suivre la même direction.

Lorsqu'un navire part des côtes occidentales de France, il ne faut pas croire qu'il suive constamment le même rumb de vent; au contraire, il en change très-souvent dans le cours de sa navigation. Il est d'abord obligé de cingler au large vers l'Ouest, afin de décaper; c'est-à-dire, de s'éloigner des côtes & des écueils qui les environnent, pour qu'il n'ait pas à craindre d'y être rejeté par le gros tems: ensuite, si sa destination est pour l'Amérique, il se hâte de diriger sa route vers le Sud, jusqu'à ce qu'il ait passé le tropique du Cancer, afin de profiter des vents d'*alisée* qui soufflent continuellement de l'Est à l'Ouest dans toute l'étendue de la *Zone* torride; ou si sa destination est pour toute autre partie du monde, après avoir décapé, il cherche à gagner des parages où soufflent les vents qui peuvent favoriser le reste de sa navigation. En un mot, il change & modifie la direction de sa route,

ſelon que les circonſtances lui en montrent la néceſſité.

« C'eſt ſur cette règle générale, & ſur la con-
» noiſſance qu'on a des vents & des courants,
» dit M. *Bouguer*, qu'on doit dreſſer le plan
» de ſa navigation. Les vents & les courans ſe
» dirigent vers l'Oueſt dans preſque toute l'é-
» tendue de la Zone torride : les premiers exci-
» tent les ſeconds. Lorſque les vents ſoufflent
» long-tems du même côté, la ſurface de la mer
» prend du mouvement dans le même ſens ;
» mais les terres qui ſont dans la Zone torride,
» détournent auſſi les vents de leur première di-
» rection, & elles les en détournent d'une ma-
» nière qui eſt bien digne de remarque : les vents
» s'écartent de la ligne droite pour aller rencon-
» trer les côtes preſque perpendiculairement. Il
» faut apparemment attribuer cet effet à la faci-
» lité qu'ont les continens de s'échauffer plus
» que la mer ; ils communiquent leur chaleur
» à la partie baſſe de l'air qui ſe trouve au deſſus.
» Cet air devenant plus léger, parce qu'il ſe
» dilate en s'échauffant, tend à s'élever ; il cède
» en bas ſa place, & il donne lieu à l'air des
» environs de ſubvenir en refluant, & de s'élever
» à ſon tour après s'être échauffé ; ce qui entre-
» tient une circulation continuelle, & ce qui
» fait que le vent ſouffle vers la terre de tous
» côtés. C'eſt ce qu'on remarque en divers en-
» droits de la mer des Indes & de celle du Sud,
» de même qu'à une certaine diſtance d'Afrique
» dans notre Océan. Une partie de l'air, entre

FIG. » les deux continens, suit la direction des vents » alisés, en allant vers l'Ouest, pendant que » l'autre partie prend un autre chemin pour s'ap» procher de la côte d'Afrique ; & l'espace du » milieu, qui n'est guère éloigné, dans la mer » du Nord, de l'intersection du méridien de l'île » de Fer & de l'équateur, est souvent sujet à des » calmes & à des orages que les Marins ne sau» roient éviter avec trop de soin «.

PROBLÊME. VIII.

309... *Connoissant le point de départ, le rumb de vent qu'on a suivi & le chemin qu'on a fait, trouver sur la Carte le lieu de l'arrivée.*

Supposons qu'étant parti de la pointe S-E de l'île Saint-Michel, dont la latitude & la longitude sont déja connues, on ait couru 210 lieues au S-S-O.

Pour tracer ou figurer sur la Carte le triangle
76 qui exprime les conditions de ce Problême, on menera, par le point C du départ, une parallèle au S-S-O, que l'on terminera en D, en faisant CD de 210 lieues ou de 10°. 30′, pris sur l'échelle des longitudes ; on achevera ensuite la construction de ce triangle de la manière enseignée (303). Le point D, déterminé de cette manière, ne sera pas le lieu de l'arrivée, quoique l'hypotheneuse CD soit du nombre de lieues qu'on a courues, parce que ces lieues n'ont été évaluées qu'en degrés de l'équateur, & qu'il faut

faut avoir égard à l'augmentation qu'ont reçue FIG.
les distances respectives de tous les lieux, à rai-
son de celle qu'on a donnée aux degrés du méri- 76
dien de la Carte réduite. Donc pour trouver le véritable point d'arrivée, on évaluera en degrés de longitude la grandeur du côté CE, qui exprime la différence en latitude; ensuite on comptera ces degrés sur le méridien gradué, à partir de la latitude de départ, jusqu'à celle de l'arrivée. Par le point du méridien où ces degrés se terminent, on menera une parallèle à la ligne E & O, qui, rencontrant l'hypotheneuse en un point quelconque H, fera connoître que ce point H est celui de l'arrivée, dont il sera facile de connoître la longitude par le premier Problême.

De sorte qu'on trouvera dans cet exemple, qu'on est arrivé par 27°. 56′ de latitude Nord, & par 32°. 16′ de longitude occidentale de Paris.

PROBLÊME IX.

310... *Supposons maintenant qu'à partir du point d'arrivée du Problême précédent, on ait cinglé directement à l'Ouest, & qu'on ait fait 50 lieues.*

Pour trouver dans cet exemple & dans tous les cas semblables la longitude d'arrivée, on comptera depuis le point du départ sur la droite HO, parallèle à la ligne E & O, le nombre de lieues de la route, réduit en degrés de longi-

FIG. tude. Du point O, par exemple, où ſe termine ce nombre, on menera OL parallèle à la ligne N & S; & enfin pour achever la conſtruction du triangle rectangle, on menera l'hypotheneuſe
76 HL, de manière qu'elle faſſe au point H l'angle OHL égal au nombre de degrés de la latitude de départ. Si l'on porte la longueur de cette hypothéneuſe ſur l'échelle des longitudes, on trouvera 2°. 54′ pour la différence de longitude; c'eſt-à-dire, qu'on eſt arrivé par 35°. 10′ de longitude occidentale, la latitude d'arrivée étant de 29°. 56′, la même que celle du départ.

La conſtruction du triangle rectangle HOL, dont l'angle H eſt égal à la latitude de départ, eſt fondée ſur ce principe: *Le nombre de lieues courues ſur un parallèle quelconque, eſt au nombre de lieues qui leur correſpondent ſur l'équateur, comme le co-ſinus de la latitude eſt au rayon.* On a donc ici,

HO : HI :: co-ſ. OHI : R; ou :: ſin. OIH : R.

PROBLÊME X.

311... *Connoiſſant le point de départ, le rumb de vent qu'on a ſuivi & la latitude d'arrivée, on demande les lieues de la route & la longitude d'arrivée.*

Suppoſons qu'on ſoit parti de la pointe la plus ſeptentrionale de l'île d'*Oueſſant*, dont la latitude eſt de 48°. 32′ Nord, & la longitude de

7°. 21′ Oueſt, & qu'après avoir couru au N-E, on ſe ſoit trouvé par obſervation à 50°. de latitude N. FIG.

On menera, à partir du point A de départ, deux lignes parallèles ; l'une au rumb de vent qu'on a ſuivi, & l'autre à la ligne N & S de la Carte. Sur cette dernière, on portera la différence en latitude évaluée en degrés de longitude, par un point I, où ſe termine cette différence, menant une parallèle à la ligne Eſt & Oueſt, juſqu'à la rencontre de l'hypotheneuſe, on aura AH pour la longueur de la route, laquelle étant portée ſur l'échelle des longitudes, donnera 2°. 3′ = 41 lieues. 76

Pour avoir le point d'arrivée, par le cinquantième degré de latitude, pris ſur le méridien de la Carte, on menera une parallèle à la ligne E & O. Le point C, où cette parallèle rencontrera l'hypotheneuſe, ſera celui de l'arrivée, dont on aura facilement la longitude, en obſervant à quel degré de l'équateur il répond.

On trouvera donc de cette manière qu'on eſt arrivé par 5°. 9′ de longitude occidentale, & par 50°. de latitude, déterminée auparavant par obſervation.

PROBLÊME XI.

312... *Connoiſſant le point de départ, la longueur de la route & la latitude d'arrivée, on demande le rumb de vent qu'on a ſuivi, & la latitude d'arrivée.*

FIG. Suppoſons qu'un navire, partant du *Havre-de-Grace*, dont la latitude eſt de 49°. 29′, & la longitude 2°. 14′ Oueſt de Paris, ait couru 52 lieues entre le Nord & l'Oueſt, & qu'il ſe ſoit
76 trouvé à la fin de cette route par 50°. 31′ de latitude Nord.

Pour déterminer le rumb de vent qu'on a ſuivi, du point de départ tel que A, on menera une parallèle à la ligne N & S, & égale au nombre de degrés & minutes de la différence des latitudes de départ & d'arrivée, pris ſur l'échelle des longitudes. Enſuite ayant mené, par un point I où elle ſe termine, une parallèle à la ligne E & O, on la coupera en un point H, par un arc décrit du point A comme centre, & d'un rayon égal au nombre des lieues de la route, réduit en degrés & minutes ſur l'échelle des longitudes. Si par le centre de la roſe la plus voiſine, on mène une parallèle à l'hypotheneuſe AH, cette parallèle ſera le rumb de vent qu'on a ſuivi, lequel eſt ici l'O-N-O 50′ Nord.

Pour avoir le point d'arrivée par les 50°. 31′ de latitude comptés ſur le méridien, on menera une parallèle à la ligne E & O, laquelle venant à rencontrer l'hypotheneuſe AH, prolongée en un point quelconque C, fera connoître que ce point C eſt celui de l'arrivée. On trouvera donc qu'on eſt arrivé par 5°. 52′ de longitude occidentale de Paris, & par 50°. 31′ de latitude; c'eſt-à-dire, qu'on eſt dans la baie de Torbay, près la rade d'Exmouth.

FIG.

PROBLÊME XII.

313 ... *Connoiſſant le point de départ, le rumb de vent qu'on a ſuivi & la longitude d'arrivée, on demande la latitude d'arrivée & les lieues de diſtance.* 76

Suppoſons qu'un navire, étant parti de *Marſeille*, dont la latitude eſt de 43°. 17′, & la longitude de 3°. 2′ orientale de Paris, ait cinglé au S-O¼S 2°. 25′ Sud, juſqu'à ce qu'il ſoit parvenu à 0°. 30′ de longitude occidentale.

Pour trouver ſur la Carte le point d'arrivée, on menera par le point de départ, comme dans les exemples précédents, une parallèle au rumb de vent qu'on a ſuivi. Par les 30′ de longitude d'arrivée, on menera pareillement une parallèle à la ligne N & S. La rencontre de ces deux lignes déterminera ſur la Carte le lieu de l'arrivée; c'eſt ici la pointe ſeptentrionale de l'île d'*Ivice*, dont la latitude eſt de 39°. 5′, telle qu'elle eſt indiquée par la diviſion correſpondante du méridien. Cherchant enſuite la longueur de la route, comme dans les exemples précédents, on trouvera qu'elle eſt de 101 lieues marines.

REMARQUE.

314 ... Si, en pointant une Carte, il arrive qu'on ſe trouve à une de ſes extrémités, & qu'on ne puiſſe pas achever ſon opération, à cauſe de l'étendue de la route, il faut alors ſe ſervir d'une

FIG. seconde Carte ; mais dans ce cas, on doit avoir soin de partager la route en deux parties, telles que le point d'arrivée de la première, déterminé sur la Carte où l'on a commencé l'opération; soit le point de départ de la seconde partie de la route transportée sur la nouvelle Carte ; observant sur-tout que les deux routes aient le même rumb de vent. Si le premier méridien de l'une de ces Cartes n'étoit pas le même que dans l'autre, il seroit facile de réduire une de ces longitudes à l'autre, d'après ce qui a été dit, (page 146).

Description & usage du Quartier de réduction, pour résoudre les Problémes de Navigation.

77 315... Le *Quartier de réduction* est une espèce de Carte générale qui convient à toutes les différentes parties du globe terrestre. Sa figure rectangulaire, qui représente un quart de l'horison, est divisée en plusieurs petits quarrés par des lignes parallèles coupées perpendiculairement par d'autres parallèles.

Le sommet C de l'angle droit ACB, formé par les deux côtés extérieurs AC, BC, est le centre de plusieurs quarts de cercle également distans les uns des autres. Un de ces quarts de cercle AB est divisé en degrés, & soudivisé par des transversales, de manière à évaluer facilement la cinquième partie d'un degré. Les deux rayons AC, BC, de ce quart de cercle gradué peuvent représenter, suivant les différentes di-

rections de la route, l'un la ligne Nord & Sud, & l'autre la ligne Est & Ouest. Si l'on prend AC pour la ligne Nord & Sud, on pourra le considérer comme représentant la moitié de l'axe de la Terre ou le rayon du méridien, alors BC représentera le rayon de l'équateur; ou, ce qui est la même chose, la ligne Est & Ouest. FIG. 77

316... Le but de cet instrument est d'épargner la peine de tracer & même de calculer le triangle rectangle qui sert à résoudre les problêmes de navigation; ce triangle se trouve tout formé sur cet instrument, quel que soit le rumb de vent qu'on a suivi. Le fil attaché au centre C, & qu'on tend sur telle direction que l'on veut, représente l'hypotheneuse, par conséquent la longueur & la direction de la route. Les deux côtés de l'angle droit, qui expriment les différences en latitude & en longitude, sont formés par des lignes parallèles aux deux rayons AC & BC.

317... Dans la pratique on peut faire valoir chaque division du Quartier 1, 2, 3, 4, &c. lieues, selon qu'on le juge à propos. Si l'on n'a fait que très-peu de chemin, on réduit alors les lieues en milles, & dans ce cas chaque division ne vaut qu'un ou deux milles; quelquefois même, pour avoir plus de précision, on se contente de ne les faire valoir que des dixièmes de mille. En un mot, on en règle la valeur selon l'étendue de l'instrument, & suivant la longueur de la route qu'on veut réduire. Le Quartier de réduction satisfait en général à tous les besoins du

FIG. pilote : il eſt d'ailleurs moins ſujet que les autres inſtrumens aux erreurs qui viennent de faute d'attention, en ce qu'il met ſous les yeux toutes les opérations dans leur plus grande ſimplicité.

Manière de réduire les routes ſur le Quartier de réduction.

318... Nous ne nous arrêterons pas à la réduction des lieues courues au Nord ou au Sud, puiſqu'il ſuffit dans tous les cas, pour avoir la différence en latitude, de convertir ces lieues en degrés de la manière enſeignée (247); mais il n'en eſt pas de même des lieues courues à l'Eſt ou à l'Oueſt, pour avoir la différence en longitude, ainſi que nous l'avons vu (291). Comme la longitude ne ſe compte qu'en degrés de l'équateur, toutes les fois qu'on court un certain nombre de lieues ſur un parallèle ou cercle mineur, il faut les réduire en lieues courues ſur l'équateur, afin de connoître de combien on a avancé réellement en longitude : c'eſt ce qu'on appelle fort improprement *réduire de lieues mineures en lieues majeures*. Je dis fort improprement, parce que cette expreſſion préſente l'idée d'une réduction de lieues plus petites en lieues plus grandes, ce qui n'eſt pas, mais en un plus grand nombre de lieues.

319... Pour rendre ceci plus ſenſible, ſoient,
77 par exemple, deux arcs AC, GH, d'un même nombre de degrés, dont l'un appartient à l'é-

quateur, & l'autre au trentième parallèle. Si, FIG.
d'après l'estime du *lock*, ou mieux d'après celle
du *fillomètre*, on juge qu'on a fait 100 lieues
pour parcourir l'arc GH, il est clair qu'on en
auroit fait davantage pour parcourir l'arc AC 77.
de l'équateur qui lui correspond ; parce que les degrés de ce cercle sont plus grands que ceux du trentième parallèle. Pour connoître l'étendue de l'arc AC, & déterminer par-là la différence en longitude de cette route, il suffit de faire attention que sur la surface du globe les espaces AC, GH, doivent être dans le même rapport que les circonférences des cercles dont ils sont partie. Or nous avons vu que les circonférences sont dans le même rapport que leurs rayons; donc l'arc AC est plus grand que l'arc GH, dans le même rapport que le rayon de l'équateur est plus grand que celui du trentième parallèle. Donc pour réduire l'espace GH à l'espace correspondant AC, il faut augmenter le nombre de lieues courues sur GH, dans le même rapport que le rayon de l'équateur est plus grand que celui du parallèle en question, ce qui se réduit à chercher le quatrième terme de cette proportion :

Le co-f. de 30°. : *R* : : 100 *lieues mineures* : 115, 4 *de lieues majeures.*

Ou d'une manière générale :

{ *Le co-finus de la latitude*
{ *est au rayon de l'équateur*,

FIG.

comme le nombre de lieues courues sur un parallèle situé à cette latitude,
est au nombre de lieues qui lui correspond sur l'équateur.

77 320... Pour exécuter cette opération sur le Quartier de réduction, on compte les degrés de latitude sur le $\frac{1}{4}$ du cercle gradué, à commencer du point B. Le quartier ne représente pas alors une partie de l'horison, mais le quart du méridien terrestre. On tend le fil sur le degré de latitude où est situé le parallèle de la route; on compte ensuite sur la ligne CB les lieues courues à l'Est ou à l'Ouest; & à partir du point où elles se terminent, on monte parallèlement à CA, jusqu'à la rencontre du fil où l'on plante une épingle. Le nombre d'intervalles compris entre le centre C & l'épingle, donne le nombre de lieues majeures, & par conséquent la différence en longitude. C'est ainsi que l'on trouve, par exemple, que trente quatre lieues courues sur le cinquantième parallèle, font 52, 8 de lieues majeures, ou courues sur l'équateur.

321... Pour réduire au contraire les lieues majeures en lieues mineures, on tend le fil sur la latitude du parallèle de la route, comme ci-dessus; puis, à partir du centre C, on compte le long du fil le nombre de lieues majeures par celui des arcs concentriques, au bout desquels on plante une épingle. Du point où est l'épingle, on descend perpendiculairement jusqu'à

la rencontre de la ligne CB ; & le nombre d'intervalles de cette droite, à partir du point C, jusqu'à celui de rencontre, est le nombre de lieues mineures que l'on cherche. C'est de cette manière que l'on a retrouvé que 52, 8 de lieues majeures répondoient à 34 lieues mineures sur le cinquantième parallèle. FIG. 77

Observations générales sur la direction des Routes.

322... Quand on court directement à l'Est ou à l'Ouest, on ne change point de latitude, puisque le parallèle du point d'arrivée est le même que celui du départ : c'est donc sur ce parallèle qu'il faut réduire les lieues courues à l'Est ou à l'Ouest.

323... Si l'on court directement au Nord ou au Sud, on ne change point de longitude, & dans ce cas il n'y a point de réduction à faire.

324... Mais si l'on court sur une route oblique ; si l'on suit, par exemple, le N-E, les lieues à l'Est qui en proviendront, n'auront été faites, ni sur le parallèle de départ, ni sur celui de l'arrivée : elles auront été faites sur les parallèles compris entre deux ; alors on fera la réduction des lieues mineures en lieues majeures, sur le parallèle qui tient le milieu entre celui du départ & celui de l'arrivée, qu'on appelle pour cette raison, *moyen parallèle.* Voilà ce qui se pratique, lorsqu'on fait usage du Quartier de réduction pour résoudre les problêmes de navigation.

325... Il y a plusieurs manières de trouver

le moyen parallèle d'une route. La plus ſimple & la plus uſitée parmi les Marins, conſiſte à prendre la moitié de la ſomme des deux latitudes de départ & d'arrivée, ſi elles ſont de même dénomination; ou le quart de cette ſomme, ſi ces deux latitudes ſont de différente dénomination. Dans ce dernier cas, il vaudroit mieux partager la route en deux parties, dont l'une ſeroit ſuppoſée finir à l'équateur, & l'autre ſeroit ſuppoſée y commencer; alors la recherche du moyen parallèle de chaque route étant ramenée au premier cas, on auroit avec plus d'exactitude leur différence en longitude.

326... Le moyen parallèle trouvé de cette manière, eſt aſſez exact dans la pratique, pourvu qu'on ne paſſe pas au-delà du ſoixantième degré de latitude, & que la longueur de la route n'excède pas 200 lieues. Si elle ſurpaſſoit ce nombre, ce qui n'eſt pas ordinaire, on la partageroit en pluſieurs routes plus petites, & l'on réduiroit ſéparément la différence en longitude de chacune ſur le moyen parallèle qui lui convient. Cette attention eſt néceſſaire, parce que, dans les routes de 200 lieues, l'erreur en longitude, qui réſulte de l'uſage du moyen parallèle, peut aller

jusques	à 1′ 14″	vers le paral.	45°. de lat.
	à 4′ 5		60 . . . .
	à 32′ 24		75 . . . .
	à 1°.48′78″		80 . . . .

On voit donc qu'il ne ſeroit pas prudent de

ſe permettre l'uſage du moyen parallèle au-delà des limites preſcrites. Si la route, au lieu d'être de 200 lieues, étoit de 400, les erreurs ſeroient huit fois plus fortes; & elles ſeroient au contraire huit fois plus petites, ſi la route, au lieu d'être de 200 lieues, n'étoit que la moitié moins.

Principes néceſſaires à la réſolution des Problêmes géneraux de Navigation.

Pour le calcul des Latitudes.

I.

317... *Connoiſſant la latitude de départ & la difference en latitude, trouver la latitude d'arrivée.*

Premier cas. Si la latitude de départ & la différence en latitude ſont toutes deux Nord ou toutes deux Sud, ajoutez-les enſemble, leur ſomme exprimera la latitude d'arrivée, qui ſera auſſi du même côté.

Second cas. Si elles ſont de différente dénomination, retranchez la plus petite de la plus grande; le reſte ſera la latitude d'arrivée qui ſera toujours du côté le plus fort.

Exemples de l'un & de l'autre Cas.

Etant parti de { 39°. 56' de latitude Nord / 6. 10. de latitude Sud }

on a fait { 4°. 10' au Nord / 1. 12 au Nord }

On demande la latitude d'arrivée de chacune de ces routes.

Rép. Latit. d'arrivée, $\left\{ \begin{array}{l} 44^{\circ}.\ 6'\ \text{Nord} \\ 4^{\circ}.\ 58.\ \text{Sud} \end{array} \right\}$

II.

328 ... *Connoiſſant la latitude de départ & d'arrivée, trouver la différence en latitude.*

Premier cas. Si la latitude de départ & celle d'arrivée ſont du même côté, toutes deux Nord ou toutes deux Sud, retranchez l'une de l'autre; le reſte exprimera la différence en latitude, qui ſera auſſi du même côté, ſi la latitude d'arrivée eſt plus grande que celle du départ, autrement elle ſera du côté oppoſé.

Second cas. Si les deux latitudes ſont de différente dénomination, l'une Nord & l'autre Sud, ajoutez-les enſemble; la ſomme ſera la différence en latitude, qui eſt alors du même côté que la latitude d'arrivée.

Exemples de l'un & de l'autre cas.

Etant parti de $\left\{ \begin{array}{l} 4^{\circ}.\ 56'\ \text{de latitude Nord} \\ 4.\ 25.\ \text{de latitude Nord} \end{array} \right\}$

on eſt ar. par $\left\{ \begin{array}{l} 0^{\circ}.\ 47'\ \text{de latitude Nord} \\ 2^{\circ}.\ 48'\ \text{de latitude Sud} \end{array} \right\}$

On demande la différence en latitude de chacune de ces routes.

Rép. Différence en latit. $\left\{ \begin{array}{l} 4^{\circ}.\ 9'\ \text{Sud} \\ 7^{\circ}.\ 13'\ \text{Sud} \end{array} \right\}$

Pour le calcul des longitudes.

Nous ne parlerons que des longitudes orientales & occidentales ; les ſeules aujourd'hui en uſage dans la Géographie, l'Aſtronomie & la Navigation.

I.

329... *Connoiſſant la longitude de départ & la différence en longitude, trouver la longitude d'arrivée.*

Premier cas. Si la longitude de départ & la différence en longitude ſont de même dénomination, toutes deux orientales ou occidentales, ajoutez-les enſemble, & vous aurez la longitude d'arrivée, qui ſera auſſi du même côté. Si la ſomme excède 180°., retranchez-la de 360°., le reſte ſera la longitude d'arrivée, qui eſt alors du côté oppoſé à celle du départ.

Second cas. Si la longitude de départ & la différence en longitude ſont de différente dénomination, retranchez l'une de l'autre; le reſte ſera la longitude d'arrivée, qui eſt toujours du côté le plus fort.

Exemples de l'un & de l'autre cas.

Etant parti de $\left\{ \begin{matrix} 21^\circ. & 9' \\ 11. & 50' \end{matrix} \right\}$ de longit. occid. de Paris.

on a fait $\left\{ \begin{matrix} 3^\circ.\ 40' \text{ à l'Oueſt} \\ 4^\circ.\ 22. \text{ à l'Eſt} \end{matrix} \right\}$

On demande la longitude d'arrivée de chacune de ces routes.

Rép. Long. d'ar. { 24°. 49′ Oueſt de Paris / 7°. 28. Oueſt de Paris }

I I.

340... *Connoiſſant la longitude de départ & d'arrivée, trouver la différence en longitude.*

Premier cas. Si les deux longitudes, celle de départ & celle d'arrivée, ſont toutes deux orientales ou occidentales, retranchez l'une de l'autre, & vous aurez la différence en longitude, qui ſera auſſi du même côté, ſi la longitude d'arrivée eſt plus forte que celle de départ, autrement elle ſera du côté oppoſé.

Second cas. Si les deux longitudes ſont de différente dénomination, ajoutez les enſemble pour avoir la différence en longitude, qui eſt alors du même côté que la longitude d'arrivée. S'il arrive que la ſomme excède 180°., retranchez-la de 360°.; le reſte ſera la différence en longitude qui, dans ce cas, ſera du même côté que la longitude de départ.

Exemples de l'un & de l'autre cas..

Etant parti de { 60°. 37′ de long. orient. de Paris / 180°. . . de long. occid. de Paris

on eſt arrivé par { 55°. 24′ de long. orient. / 178 . 21′ de long. orient.

On

On demande la différence en longitude de chacune de ces routes.

Rép. Différ. en long. { 5°. 13′ occidentale. 1°. 39. occidentale. }

Problêmes généraux de Navigation.

Chacun de ces Problêmes sera résolu de deux manières différentes : *par le quartier de réduction & par le calcul trigonométrique ;* ce qui nous procurera dans tous les cas deux objets de comparaison entre ces deux méthodes. Dans les solutions trigonométriques, nous nous servirons des latitudes croissantes, afin d'éviter l'usage du moyen parallèle, & d'avoir plus de précision dans les résultats.

Nous supposerons dans ces premiers exemples, qu'on a eu égard à la variation & à la dérive.

PROBLÊME PREMIER.

341... *Connoissant le point de départ, le rumb de vent qu'on a suivi, & le chemin qu'on a fait, trouver la latitude & la longitude du point d'arrivée.*

EXEMPLE.

Etant parti de 40°. 45′ de latitude Nord, & de 15°. 20′ de longitude occidentale de Paris, on a couru soixante lieues au Nord-ouest $\frac{1}{4}$ N. On demande la latitude & la longitude du point d'arrivée.

FIG.

OPÉRATION.

Latit. de dép...N. 40°. 45′	Long. de dép..O 15°.20′ 0″
Differ. en lat...N. 2. 29′	Diff. en long...O 2. 14′.24″
Lat. d'arrivée...N. 43°. 14′	Long. d'ar.....O 17°.34′24″
Som. des lat.......83°. 59′	
Moy. paral..........41. 59′	

Il faut avoir ſoin de diſpoſer, comme ci-deſſus, les articles en deux colonnes, qu'on remplira à meſure qu'on avancera dans l'opération.

77 342... On comptera ſur le quartier de réduction, à partir du centre C, qui doit être regardé comme le point de départ de toutes les routes, les ſoixante lieues le long de la ligne qui repréſente le N-O$\frac{1}{4}$N, faiſant valoir chaque intervalle une lieue; on plantera une épingle où elles ſe terminent : enſuite prenant AC pour la ligne N & S, & CB pour la ligne E & O, & remarquant à quel point de diviſion de ces deux lignes l'épingle répond verticalement, on trouvera 49, 9 ſur la première, & 33, 3 ſur la ſeconde; c'eſt-à-dire, qu'on a avancé de 49 lieues & 9 dixièmes de lieue vers le Nord, & de 33 lieues & 3 dixièmes de lieue vers l'Oueſt, & que par conſéquent la latitude d'arrivée eſt de 43°. 14′ Nord, en négligeant les ſecondes.

343... Enſuite pour réduire en lieues majeures les 33, 3 de lieue courues à l'Oueſt, on ſe ſervira du moyen parallèle, qu'on trouvera

de la manière enseignée (325); c'est-à-dire, FIG.
que puisque dans cet exemple les deux latitudes de départ & d'arrivée sont de même dénomination, le moyen parallèle sera la moitié de leur somme; savoir, 41°. 59'. On tendra donc le fil sur 41°. 59' du cercle gradué, à partir du 77.
point B; on comptera les 33, 3 de lieues courues à l'Ouest, sur la ligne CB. Du point de division où elles se terminent, on montera parallelement à la ligne CA, jusqu'à la rencontre du fil; ensuite si du centre C, jusqu'à ce point de rencontre, on compte par les arcs concentriques, on trouvera 44, 8 d'intervalle, ce qui signifie que les 33, 3 lieues mineures, courues sur le moyen parallèle de 41°. 59', répondent à 44, 8 de lieues majeures, ou courues sur l'équateur. On ajoutera cette différence en longitude réduite en degrés à la longitude du départ, & l'on aura 17°. 34' 24'' pour la longitude d'arrivée.

On est donc arrivé par 43°. 14' de latitude Nord, & par 17°. 34' 24'' de longitude de Paris.

Solution Trigonométrique.

344.... Dans le triangle rectangle, qui exprime les circonstances de cette route, & que nous venons de résoudre sur le quartier de réduction, on connoît l'hypotheneuse ou la longueur de la route, l'angle droit & l'angle du rumb de vent, & on demande de trouver les

deux côtés de l'angle droit, dont l'un exprime la différence en latitude, & l'autre la différence en longitude; car c'est de ces deux valeurs que dépend le point d'arrivée.

Pour avoir la différence en latitude, on fera cette proportion :

Le rayon
est au co-sinus de l'angle du rumb de vent,
comme la longueur de la route
est à la différence en latitude;

c'est-à-dire,

R : co-f. 33°. 45′ : : 60 lieues : 49, 9 de lieue.

Ce quatrième terme, réduit en degrés & ajouté à la latitude de départ, puisqu'on a cinglé au Nord, donnera 43°. 14′. Nord pour la latitude d'arrivée.

Pour avoir la différence en longitude, on fera celle-ci :

Le rayon
est à la tangente de l'angle du rumb de vent,
comme la différence des latitudes croissantes (1)
d'arrivée & de départ
est à la différence en longitude;

c'est-à-dire, R : tang. 33°. 45′ : : 202′ : 134′, 9

(1) On a pris dans la table des latitudes croissantes, la différence entre 2681′ & 2887′ correspondantes à 40°. 45′, & à 43°. 14′, parce que la latitude de départ &

= 2°. 14′ 54″ pour différence en longitude Oueſt de Paris. FIG.

Ajoutant, comme ci-deſſus, ce quatrième terme à la longitude de départ, on aura 17°. 34′ 54″ pour la longitude d'arrivée.

Si l'on compare les réſultats de ces deux méthodes, on verra que la longitude du point d'arrivée, obtenue par le calcul, eſt plus forte de 30″ que celle qu'on a obtenue par le quartier de réduction : le plus ſouvent elles diffèrent encore davantage.

PROBLÊME II.

345... *Connoiſſant le point de départ, le rumb de vent & la latitude d'arrivée, trouver le nombre de lieues qu'on a faites, & la longitude d'arrivée.*

EXEMPLE.

Suppoſons qu'un navire étant parti de Breſt, dont la latitude eſt de 48°. 23′ Nord, & la longitude de 6°. 50′ Oueſt de Paris, ait couru au SO-¼O 4°. Oueſt, juſques par la latitude de 44°. 50′ Nord; on demande la longueur de ſa route, & la longitude du point d'arrivée. 77.

celle d'arrivée ſont de même dénomination : on auroit fait le contraire, c'eſt-à-dire, on auroit pris la ſomme de ces deux nombres de minutes, ſi les deux latitudes avoient été de différent côté.

Opération.

77

Lat. de dép.......N 48°. 23′	Long. de dép. O 6°. 50′ 0″
Latit. d'arriv.....N 44. 50′	Dif. en long.. O 9. 3. 0″
Différ. en latit......S 3°. 33.	Long. d'ar....O 15°. 53′ 0″
Somme des latit..... 93°. 13′	
Moyen parallèle....46°. 36′	

Longueur de la route, 429, 1 de mille = 143 lieues.

316... On soustrait la latitude d'arrivée de celle du départ, & la différence est 3°. 33′ = 71 lieues S, parce qu'on a avancé vers le Sud. Après cela, on tend le fil sur le rumb de vent, lequel représente sur le quartier le S-O$\frac{1}{4}$O 4°. O : on compte sur la ligne N & S les 71 lieues de différence en latitude, en observant de faire valoir chaque intervalle trois lieues, afin que la route n'excède pas les bornes de l'instrument. Du point de la ligne CA, où se termine la différence en latitude, on suit, jusqu'au fil, une ligne parallèle à CB. A ce point de rencontre, on plante une épingle, & la distance depuis C jusqu'à l'épingle, est la quantité de chemin qu'on a fait. Dans cet exemple, on trouve 143 lieues pour la longueur de la route.

Les lieues courues à l'Ouest, & comptées, comme à l'ordinaire, sur la ligne CB, depuis le point C, jusqu'à celui qui répond directement à l'épingle, sont 124, 2 de lieue mineure,

lesquelles étant réduites en lieues majeures sur le moyen parallèle de cette route, donnent 181 lieues majeures, qui font 9°. 3′ pour différence en longitude. On ajoute cette différence à la longitude de départ, parce que la route a été faite vers l'Ouest, ce qui donne 15°. 53′ Ouest pour la longitude d'arrivée. FIG. 77.

Solution Trigonométrique.

347... Co-s. S-O$\frac{1}{4}$O 4°. O = 60°. 15′ : R :: 71 lieues = 213 milles : 429, 3 de mille, ou 143 lieues pour la longueur de la route.

R : tang. 60°. 15′ :: différ. des latit. crois. 310′ : 542′, 3 = 9°. 2′ 18″ pour différence en longitude.

PROBLÊME. III.

348... *Connoissant le point de départ & la latitude d'arrivée, avec la longueur du chemin, trouver le rumb de vent qu'on a suivi & la longitude d'arrivée.*

EXEMPLE.

Etant parti d'un lieu situé à 0°. 15′ de latitude Sud, & à 110°. de longitude occidentale de Paris, on a couru 53 lieues $\frac{1}{2}$ entre le Nord & l'Ouest, jusques par 2°. de latitude Nord : on demande le rumb de vent qu'on a suivi, & la longitude du point d'arrivée.

Opération.

Latit. de départ......S 0°. 15′	Long. de dép..O 110°. 0′ ″
Latit. d'arrivée......N 2°.	Dif. en long...O 1°. 27′ ″
Différ. en latit......N 2°. 15′	Long. d'ar... .O 111°. 27′ ″
Somme des latit...... 2°. 15′	
Moyen parallèle. . . . . . 33′	

349 ... Dans cet exemple, les deux latitudes étant de différente dénomination, on les ajoute ensemble pour avoir la différence en latitude 2°. 15′ = 45 lieues. On compte ensuite, par les arcs concentriques, les 53 lieues $\frac{1}{2}$ de la route; & les faisant convenir avec les 45 lieues de différence en latitude, comptées sur la ligne AC, on plante une épingle au point de concours. De ce point, on descend en droite ligne sur CB, & le point de division que l'on rencontre sur cette ligne, exprime la différence en longitude, laquelle est ici de 29 lieues = 1°. 27′; puis tendant le fil directement à l'épingle, jusqu'au cercle gradué, on trouve sur ce cercle 32°. 45′ = N-O$\frac{1}{4}$N 1°. à-peu-près Nord, pour le rumb de vent demandé.

350 ... Il ne reste plus qu'à chercher le moyen parallèle de la route; mais si l'on fait attention que la latitude de départ est 0°. 15′ Sud, & que la latitude d'arrivée est 2°. Nord, on verra clairement que la grandeur du moyen parallèle de la route n'est pas sensiblement différente de celle de l'équateur, & que par conséquent le

29 lieues de différence en longitude, trouvées FIG.
par la première opération, peuvent être regardées comme des lieues majeures. On ajoutera 77.
donc la différence en longitude, réduite en degrés, à la longitude de départ, & on aura 111°. 27′ Oueſt pour la longitude d'arrivée.

Solution Trigonométrique.

351... 53, 5 de lieues, ou 160, 5 de mil. : 45 l. ou 135 milles : : R : co ſ. du rumb de vent 32°. 45′ = N-O$\frac{1}{4}$N 10. Nord.

R : tang. 32°. 45′ : : ſom. des latit. croiſ. 135′ : 86′, 8 = 1°. 26′ 48″ pour différence en longitude.

PROBLÊME IV.

352... *Connoiſſant le point de départ & celui de l'arrivée, trouver le rumb de vent qui conduit de l'un à l'autre, & la longueur de la route.*

EXEMPLE.

Un vaiſſeau, en partant de l'*île de Madère*, dont la latitude eſt de 32°. 38′ Nord, & la longitude 19°. 16′ occidentale de Paris, veut aller aborder à l'*île de Téneriffe*, une des Canaries, dont la latitude eſt de 28°. 28′ Nord, & la longitude de 18°. 36′ occidentale : on demande quel eſt le rumb de vent qu'il doit ſuivre, & le chemin qu'il y à faire.

FIG.

Lat. de dép......N 32°′ 38′	Long. de dép....O 19°. 16′
Lat. d'arrivée...N 28. 28	Long. d'ar........O 18. 36
Dif. en latit.....S 4°. 10′	Dif. en long....E 0°. 40′
Som. des lat........61°. 6′	
Moyen paral........30. 33.	

Long. de la route . . . . . 84 lieues.

353... Dans cet exemple, il faut soustraire
77 la latitude d'arrivée de celle de départ ; pour avoir la différence en latitude 4°. 10′ Sud, parce qu'on a avancé vers l'équateur. On soustraira pareillement la longitude d'arrivée de celle du départ, & l'on aura 0°. 40′ pour différence en longitude orientale, parce qu'on a couru à l'Est.

354... Pour trouver le rumb de vent & la longueur de la route, on fera le contraire de ce qui a été pratiqué dans les autres exemples ; c'est-à-dire, que puisque la différence en longitude a été évaluée sur l'équateur, il faut la réduire en lieues mineures sur le moyen parallèle de la route. Ainsi les 40 minutes ou milles se réduiront, sur ce parallèle, à 34′, 5 ; après cela, on fera convenir les 34, 5 de milles courues à l'Est, avec 4°. 10′ = 250 milles courues au Sud ; on plantera une épingle au point de concours, & le fil tendu sur ce dernier point jusqu'au cercle gradué, marquera le rumb de vent qu'on a suivi. C'est ici le S¼S-E 3°. 25′ Sud, & la longueur de la route comptée par les

arcs concentriques, depuis le centre C, jufqu'à l'épingle, fera de 84 lieues. FIG.

Solution trigonométrique.

355... Différ. latit. croif. 291′ : différ. en long. 40′ :: R : tang. 7°. 49′, qui eft le rumb de vent qu'on a fuivi, lequel répond au S$\frac{1}{4}$S-E 3°. 26′ Sud. 77

Co-f. de 7°. 49′ : R :: différ. en latit. 250′ : 252′, 3 = 84 lieues pour la longueur de la route.

PROBLÊME V.

356... *Connoiffant le point de départ & la longitude d'arrivée avec le rumb de vent, trouver la latitude d'arrivée & la longueur du chemin.*

Ce Problême n'a guère lieu dans la pratique de la navigation, puifqu'il eft très-rare de fe trouver en un point quelconque de la mer, dont la longitude feroit connue, & la latitude ne le feroit pas. Si nous en faifons mention, c'eft plutôt parce qu'il eft au nombre des cas poffibles, que pour fon utilité réelle.

EXEMPLE.

Etant parti de 25°. 40′ de latitude Nord & de 160°. de long. occidentale de Paris, on a cinglé au N-E$\frac{1}{4}$E, jufques par 153°. 30′ de longitude occidentale : on demande la latitude d'arrivée & la longueur du chemin.

FIG.

Opération.

Lat. de dép.....N 25°. 40′	Long de dép...O 160°. ′ ″
Lat. d'arrivée...N 29. 50′	Long. d'ar......O 153. 30′
Dif. en latit.....N 4°. 10′	Dif. en long.....E 6°. 30′

77

357... On ne peut résoudre ce Problême sur le quartier de réduction, que par une espèce de tatonnement, en suivant la même méthode que nous avons employée jusqu'ici ; mais on y parviendra directement en faisant usage de l'échelle des latitudes croissantes, qui accompagne ordinairement cet instrument. Cette échelle a son premier degré égal à un des intervalles du quartier, & le principe qui a donné lieu à sa construction, est le même que celui des Cartes réduites ; car si l'on prend un des intervalles du quartier pour représenter l'étendue du premier degré du méridien, on trouvera l'étendue que doit avoir le second degré sur l'échelle, en cherchant le quatrième terme de cette proportion :

La somme des sécantes de toutes les minutes du premier degré,
est à un des intervalles du quartier,
comme la somme des sécantes de toutes les minutes des deux premiers degrés
est au nombre des intervalles du quartier qu'on doit porter sur l'échelle, pour y représenter l'étendue des deux premiers degrés du méridien.

Et ainsi de suite pour les autres degrés.

358... Dans l'exemple ci-dessus, la différence en longitude étant de 6°. 30′, on la comptera sur la ligne CB, en prenant chaque intervalle pour un degré. Du point de division, où se termine ce nombre, on montera parallelement à la ligne CA, jusqu'à la rencontre du N-E¼E, où l'on plantera une épingle. On prendra avec un compas la plus courte distance qu'il y a de l'épingle à la ligne CB; & la portant sur l'échelle des latitudes croissantes, si l'on a soin de mettre exactement une des pointes du compas sur la latitude de départ, l'autre marquera au-dessus 29°. 50′ pour la latitude d'arrivée. La différence en latitude sera donc 9°. 10′ Nord = 250 milles. FIG. 77.

La pointe du compas doit tomber au-dessus ou au-dessous du point de départ, selon que la route s'est éloignée ou approchée de l'équateur.

Il ne reste plus qu'à porter 250 milles sur la ligne CA du Quartier, afin de les faire convenir avec le rumb de vent qu'on a suivi, & l'on trouvera 529, 6 de mille = 176 lieues ⅓ pour la longueur de la route.

359... La construction de l'échelle des latitudes croissantes est ordinairement à trop petit point, pour qu'on puisse se flatter d'obtenir un résultat bien exact, sur-tout lorsque les parallèles de la route sont fort près de l'équateur; car alors les divisions de l'échelle étant très-serrées, la plus petite erreur peut devenir très-considérable. Les méthodes de calcul ne sont assujetties à

FIG. aucune de ces limitations, auſſi ſont-elles à préférer dans tous les cas.

Solution Trigonométrique.

77 360... Tang. du N-E $\frac{1}{4}$ E = 56°. 15′ : R :: différ. en longit. 390′ : 260′, 5.

Ce quatrième terme peut être en général, ou la différence, ou la ſomme des latitudes croiſſantes du point d'arrivée & du point de départ.

Si la route tend à augmenter la latitude de départ, comme dans cet exemple, il faut ajouter le quatrième terme de la proportion, au nombre des minutes de la table des latitudes croiſſantes, qui répond à la latitude de départ. La ſomme répondra à la latitude d'arrivée, qui eſt ici 29°. 30′ Nord.

Si, au contraire, la route tend à diminuer la latitude de départ, on ſouſtraira alors le quatrième terme de la proportion du nombre de minutes correſpondantes à la latitude de départ; le reſte répondra dans la table à la latitude d'arrivée.

Co-ſ. 56°. 15′ : R : : différ. latit. 3°. 50′ ou 320′ : 576′ = 192 lieues pour la longueur de la route.

Règles compoſées de Navigation.

361... Un navire en mer eſt obligé de changer ſi ſouvent de direction dans ſa route, ſoit par le changement du vent, ſoit par des obſta-

cles qui se trouvent sur son chemin, comme des rochers ou vigies, des bancs de sable, des îles, &c., que les Marins, pour s'éviter la peine de faire séparément le calcul de toutes ces routes, les réduisent à une seule, par une opération particulière, qu'ils nomment *Règle composée.* Elle consiste à chercher, pour chaque route particulière, les lieues Nord & Sud, & les lieues Est & Ouest; à faire la somme de celles qui ont été courues dans le même sens, & à prendre la différence de celles qui ont été courues dans un sens opposé, afin d'avoir en droite ligne & le rumb de vent, & la longueur de la route totale.

Nous allons éclaircir cela par des exemples.

Exemple I.

Etant parti de 45°. de latitude Nord, & de 8°. 30′ de longitude occidentale de Paris, & ayant couru les routes suivantes, on demande le rumb de vent & le chemin en droite ligne, ainsi que le point d'arrivée.

Routes.	Distances.	N.	S.	E.	O.
O-N-O..	12 l. = 36 m..	13,7 m.	. . . . .	. . . . .	33,3 de m.
S-O.......	20... = 60...	. . . . .	42,5 m.	. . . . .	42,5 . . .
S-O$\frac{1}{4}$S....	16... = 48...	. . . . .	39,8....	. . . . .	26,5 . .
S-E$\frac{1}{4}$E....	$8\frac{1}{3}$... = 25...	. . . . .	20,7....	13,8 m.	. . . . . .
		13,7...	103	13,8....	102,4....
			13,7..		13,8.....
			89,3..		88,6....

Rumb de vent en droite ligne, S-O 15′ Sud.
Cheminen droite ligne, 125,6 de m. = 41,8 de lieue.

FIG. 362... On formera une table à six colonnes, comme derrière. Dans la première, on marquera les routes ou rumbs de vent; dans la seconde, le chemin ou les distances; & dans
77 les quatre autres, les lieues ou milles courues au Nord, au Sud, à l'Est & à l'Ouest. Pour avoir tous ces nombres, on tendra le fil sur le rumb de vent de chaque route particulière; & ayant compté, le long de ce fil, la distance parcourue, on trouvera, comme dans les exemples précédents, que dans la première route on a couru 13,7 de mille au Nord, & 33, 3 de mille à l'Ouest. Dans la seconde, 42, 5 de mille au Sud, & autant à l'Ouest; dans la troisième, 39, 8 de mille au Sud, & 26, 6 à l'Ouest; dans la quatrième, 20, 7 de mille au Sud, & 13, 8 à l'Est.

363... Pour trouver le rumb de vent & la distance en droite ligne, on fera convenir ensemble la différence en latitude 89, 3 de mille, avec la différence en longitude 88, 6 de mille. On tendra le fil sur le point de concours de ces deux distances, & on trouvera que le rumb de vent en droite ligne est 44°. 15′ = S—O 15′ Sud, & que le chemin en droite ligne est de 125′, 6 = 41, 8 de lieue.

Enfin, avec la latitude de départ & la différence en latitude, on déterminera la latitude d'arrivée, qui est ici de 43°. 31′ Nord; ensuite, réduisant les 88, 6 de milles, courues à l'Ouest sur le moyen parallèle, on trouvera 123, 6 de milles pour différence en longitude, laquelle, réduite

réduite en degrés, & ajoutée à la longitude de départ, donnera 10°. 33′. 36″ pour longitude d'arrivée occidentale.

La méthode est absolument la même pour toutes les règles composées de cette espèce.

Opération.

Latit. de départ.. N 45°.	Long. de d... O 8°. 30′. 0″
Différ. en latit.... S 1°. 29′	Dif. en long. O 2°. 3′ 36″
Latit. d'arrivée...N 43°. 31′	Long. d'ar...O 10°. 33′ 36″
Somme des latit.... 88°. 31′	
Moyen parallèle .... 44°. 15′	

Solution Trigonométrique.

364... Pour déterminer par le calcul l'angle du rumb de vent, on se servira de la différence en longitude, réduite sur le moyen parallèle de la route.

Différ. des latit. croiss. 125′ : différ. en longit. 123, 6 :: R : 44°. 40′ = S O 20′ Sud.

Co-s. 44°. 40′ : R :: différ. en latit. 89′, 3 : 125′, 5 = 41, 8 de lieue pour la longueur de la route.

Nous n'avons fait entrer dans les exemples précédents, ni variation ni dérive, parce que nous avons supposé jusqu'ici qu'on y avoit eu égard. Il s'agit maintenant de faire voir de quelle manière on corrige une route qu'on a faite, lorsqu'il y a eu variation & dérive; car voilà pré-

cisément ce qui se pratique sur mer : on se contente, lorsqu'on fait route, d'observer la quantité de variation & de dérive, afin d'en tenir compte, lorsqu'on fait le calcul des routes qu'on a suivies dans l'espace de 24 heures.

EXEMPLE II.

365... *Etant parti de 0°. 15′ de latitude Sud, & de 50°. 10′ de longitude occidentale de Paris, on a couru les routes suivantes sur un compas qui varioit de 8°. du côté du N-O, tandis que la dérive étoit de 11°. 15′ bas-bord ; c'est-à-dire, à gauche, ou du même côté que la variation : on demande le rumb de vent en droite ligne, corrigé de la variation & de la dérive, les lieues de distance & le point d'arrivée.*

Routes.	Dérive.	Variation.	Dist.	Rumbs suivis	N.	S.	E.	O.
N-E¼N.	. . . .	. . . .	30 m.	N-N-E 8°. N.	29, 1 m.	. . .	7,5 m.	. . .
N.N-E..	11°. 15′	8°. N-O	15.....	N¼N-E 8°. N.	15 . . .	. . .	0,8 . .	. . .
E¼N-E.	bas-b.		36.....	E-N-E 8°. N.	18, 2 . .	. . .	31,1 . .	. . .
N-E....	. . . .	. . . .	10½..	N-E¼N 8°. N.	9, 5 . .	. . .	4,5 . .	. . .
					71, 8 . .		43,9 . .	

Rumb de vent en droite ligne, N-E¼N 2°. 20′ N.

Chemin ou route en droite ligne, 84, 2 de mille = 28 lieues $\frac{1}{15}$.

Opération.

Latit. de départ.... S 0°. 15′	Long. de départ.. O 50°. 10′
Différ. en latit..... N 1°. 11′	Différ. en long... E.........44′
Latit. d'arrivée.... N 0°. 56′	Long. d'arrivée... O 49°. 26′
Somme des latitud....1°. 11′	
Moyen parallèle..........17′	

366... Lorſqu'on veut corriger de la dérive une route déja faite, il faut en compter la quantité à droite du rumb de vent, ſi la dérive eſt ſtribord; ou à gauche, ſi elle eſt bas-bord. La variation peut être auſſi à droite ou à gauche, & par conſéquent du même côté que la dérive ou du côté oppoſé. Si elle eſt du côté oppoſé, elle diminue la dérive; & pour y avoir égard, on doit ſouſtraire l'une de l'autre; quand elle eſt du même côté, on les ajoute enſemble, comme dans cet exemple. La dérive portoit du côté de bas-bord, ou à gauche; c'eſt-à-dire, au N-O: elle étoit donc jointe à la variation. Ainſi l'écart, produit dans les routes qu'on a faites; a été de 11°. 15′ + 8°. = 19°. 15′ du côté du N O. Donc au lieu de ſuivre le N-E$\frac{1}{4}$N, on ſuivoit réellement le N-N-E 8°. N; au lieu de ſuivre le N-N-E, on ſuivoit le N$\frac{1}{4}$N-E 8°. Nord; au lieu de ſuivre l'E$\frac{1}{4}$N-E, on ſuivoit l'E-N-E 8°. Nord; au lieu du N-E, on ſuivoit le N-E$\frac{1}{4}$N 8°. Nord.

Le reſte de l'opération s'achève exactement de la même manière que dans l'exemple précédent. On trouvera donc que la latitude d'arrivée eſt 0°. 56′ Nord, & la longitude d'arrivée eſt 49°. 26′ Oueſt de Paris.

Solution Trigonométrique.

367... Somme des latit. croiſſ. 71′ : différ. en longit. 44′ :: R : tang. 31°. 47′ = N-E$\frac{1}{4}$N 1°. 58′ Nord.

Co-ſ. 31°. 47′ : R : : différ. en lat. 71′, 8 : 83, 5 = 27 lieues $\frac{7}{18}$ pour la longueur de la route.

EXEMPLE III.

368... *Etant parti de 41°. 30′ de latitude Nord, & de 54°. 20′ de longitude occidentale de Paris, on a couru les routes ſuivantes, & on demande le rumb de vent en droite ligne, ainſi que la latitude & la longitude d'arrivée.*

Routes.	Dérive.	Variat.	Diſt.	Rumbs ſuivis.	N.	S.	E.	O.
E-S-E 5°. 30′ S	22°. 30′ ſtrib.	19°. 30′ N-O	21 m.	S-E $\frac{1}{4}$ E 2°. 45′ E	. . .	10,8 m.	18.. m.	...
S-E $\frac{1}{4}$ S 2°. 45′ E	10°. bas-b....		15.....	E-S-E 1°. 30′ S	. . .	6,1	13,7	...
S-E $\frac{1}{4}$ E 5°. 30′ E	11°. 15′ ſtrib.		28.....	E-S-E 2°. 30′ E	. . .	9,6	26,3	...
S-S-E	12°. bas-b....		23.....	S-E $\frac{1}{4}$ E 2°. 15′ S	. . .	13,5	18,6	...
						40........	76,6....	

Rumb de vent en droite ligne E-S-E 5°. 10′ S.

Chemin ou route en droite ligne 86,4 de mille = 28 lieues $\frac{8}{10}$.

Opération.

Latit. de départ...N 41°. 30′	Long. de d.. O 54°. 20′ 0″
Différ. en latit......S........40′	Dif. en long. 1°. 4′ 12″
Latit. d'arrivée...N 40°. 50′	Long. d'ar..O 52°. 39′ 48″
Somme des latit......82°. 20′	
Moyen parallèle.....41°. 10′	

369... *Solution Trigonométrique.*

{ *Différ. des latit. croiſſantes de départ & d'arrivée* = 53′.

est à la differ. en long. réduite sur le moyen parallèle = 100′, 2,
comme le rayon ou la tangente de 45°.
est à la tangente du rumb de vent 62°. 7′ =*E-S-E* 5°. 25′ *Sud.*

Co-sinus de rumb de vent 62°. 7′
est au rayon,
Comme la différence en latitude 40′
est à la longueur de la route 85′, 5 = 28 *lieues* ½.

EXEMPLE IV.

370... *Etant parti de* 15°. 20′ *de latitude Nord, & de* 19°. 30′ *de longitude occidentale de Paris, on a couru les routes suivantes, & l'on demande le rumb de vent, la longueur du chemin en droite ligne & le lieu de l'arrivée.*

Routes.	Dérive.	Variation.	Dist.	Rumbs suivis.	N.	S.	E.	O.
O-S-O 2°. ...S	10°. 30′ bas-b.	12.......N-O	69...m.	S-O...... 2°. ...S	....	50,6	...	47.m.
S-O... 1° 30′ O	8° ....bas-b.	15°......N-E	37, 5...	S-O-¼O 2° 45′ S	....	19,3	...	32, 2.
O¼S-O 3°....S	6°. 15′ strib.	10°. 30′ N-O	90.......	O-S-O..4°. ..O	....	28,6	...	85, 2.
						98,5		164, 4

Rumb de vent en droite ligne 59°. = S-O¼O 2°. 45′ Oueſt.

Chemin en droite ligne 191, 6 de mille = 63, 8 de lieue.



Opération.

Lat. de départ....N 15°. 20′	Long. de d... O 19°. 30′ 0″
Differ. en lat......S. 1. 38′	Dif. en lon. .O 2°. 49′ 36″
Latit. d'arrivée...N 13°. 42′	Long. d'ar... O 22°. 19′ 36″
Somme des lat.......29°. 2′	
Moyen paral.........14°. 31′	

371... *Solution Trigonométrique.*

Différence des Latitudes crois. de départ & d'arrivée = 101′
est à la différence en longitude 2°. 49′ 36″ = 169′, 6,
comme le rayon ou tangente de 45°.
est à la tangente du rumb de vent 59°. 13′ = *S-O-*$\frac{1}{4}$*O* 2°. 58′ *Ouest.*

Co-sinus de rumb de vent 59°. 13′
est au rayon,
comme la différence en latit. 98′, 5
est à la longueur de la route 192, 4 = 64, 1 *de lieue.*

371... Lorsqu'on navigue dans des parages où règnent certains courants, dont la direction & la vîtesse sont connus, & qu'on veut en tenir compte dans le calcul de ses routes, il suffit d'ajouter une route de plus à la règle composée. On sait, par exemple, que dans la Zone torride, & à quelque distance de part & d'autre de l'équateur, la mer se meut vers l'Occident, &

forme un courant perpétuel, dont la vîteſſe eſt d'environ trois lieues par jour. Ce courant porte un peu tantôt au Nord, tantôt au Sud, ſans perdre ſa direction conſtante à l'Oueſt. Suppoſons donc que nous ayons mis vingt-quatre heures à faire les trois routes précédentes, qui tombent préciſément dans la Zone torride, & que pendant ce tems-là, le courant équinoxial nous ait tranſportés trois lieues à l'O$\frac{1}{4}$S-O 4°. Sud. A la ſuite de ces trois routes, il n'y aura donc qu'à en ajouter une quatrième de trois lieues à l'O$\frac{1}{4}$S-O 4°. Sud, afin de tenir compte de ce courant, & l'opération générale ne ſera pas pour cela différente.

De la Correction des Routes.

373... Quoique les *Corrections*, dont nous allons parler, ſuppoſent néceſſairement l'obſervation des Aſtres, nous les plaçons ici immédiatement après le calcul des routes, avant même d'avoir parlé d'Aſtronomie, uniquement à cauſe de leur liaiſon naturelle & inſéparable avec ce qui précède. Il ſuffit ſeulement de ſuppoſer que les obſervations dont elles dépendent, ont été déja faites; on pourroit même paſſer cet article à la première lecture, & n'y revenir qu'après avoir vu les différentes méthodes de déterminer la latitude en mer par l'obſervation des Aſtres; détermination que le commun des Marins prend pour guide dans la correction des routes.

374... L'uſage des obſervations de latitude pour la correction des routes n'eſt qu'un foible moyen de ſuppléer à la connoiſſance des longitudes, lorſqu'on n'a pu les obſerver. Ces Corrections, quoique fondées ſur l'obſervation de la hauteur des Aſtres, le ſeul guide qu'un navigateur puiſſe alors conſulter, ſont d'ailleurs ſi dépendantes de la meſure du ſillage & de la variation de l'aiguille aimantée ; élémens ſi variables & ſi difficiles à déterminer, qu'elles ſe réduiſent à des à-peu-près, qui peuvent devenir une ſource d'erreurs, & égarer quelquefois le navigateur, au lieu de le guider. Il n'eſt donc, ni prudent, ni raiſonnable, de ſe ſervir de ce moyen pour connoître le point d'arrivée, que lorſqu'on ne peut faire autrement ; & pour en diriger l'application, il faut alors s'aider des notes d'obſervation qu'on aura pu faire ſur toutes les circonſtances de la route, les comparer enſemble, & les diſcuter avec ce tact & cette fineſſe de diſcernement qui ne peuvent être que le fruit de la théorie & de l'expérience ; car l'eſtime de la route journalière d'un navire n'étant fondée, dit M. *Bouguer*, que ſur des conjectures faites à l'aide d'un grand nombre de meſures, toutes ſujettes à des erreurs plus ou moins conſidérables, il faut donc qu'un pilote ait continuellement l'œil à toutes les circonſtances du mouvement du navire ; qu'il obſerve ſoigneuſement ſa dérive, qu'il tienne une note exacte de tous les petits accidens qui arrivent à la barre, & qu'il eſtime ſur le champ

ce que chacun peut produire d'erreur ſur ſa route; afin qu'au moment de Midi, ſoit qu'il y ait apparence qu'on prendra hauteur, ſoit qu'il n'y en ait pas, il ſoit en état de tenir compte de tout pour déterminer le point d'arrivée.

375... Lorſque le tems eſt couvert, ou qu'il n'eſt pas propre à l'obſervation, on doit s'en tenir aux réſultats de l'eſtime, en attendant un moment plus favorable; mais lorſqu'on peut prendre hauteur, comparant alors la latitude obſervée avec l'eſtimée, ſi l'on trouve une différence ſenſible (1), on peut bien en conclure que la meſure de la diſtance ou le rumb de vent ou tous deux à la fois ſont fautifs. Mais il ſeroit bien difficile de dire préciſément pour combien chacun a contribué à cette erreur, ſi l'on n'avoit ſous les yeux le tableau des obſervations qu'on a faites ſur toutes les circonſtances de la route : c'eſt à l'aide de ces connoiſſances, qu'on pourra attribuer à chacune de ces deux cauſes une partie de l'erreur en latitude, proportionnee à l'effet dont on la juge

(1) Si depuis la dernière obſervation de latitude, on n'a rien remarqué qui puiſſe faire ſoupçonner quelque erreur ſenſible dans le rumb de vent & dans la longueur de la route, on peut regarder la latitude eſtimée comme n'ayant pas beſoin de correction, ſi elle ne differe de la latitude obſervée que de 3′ ſur une route de 20 lieues, ou de 4′ ſur une route de 40 lieues, ou de 5′ ſur une route de 60 lieues; & ainſi de ſuite, en augmentant d'une minute pour chaque vingtaine de lieues.

capable ; afin de faire convenir l'une & l'autre avec la latitude obſervée, & en déduire la longitude du point d'arrivée, ou celle à laquelle il eſt plus plauſible de croire qu'on eſt arrivé.

376... On peut ramener en général la direction de toutes ces routes à la ligne N & S, ou à la ligne E & O, ou à celle qui tient le milieu entre ces deux dernières ; ce qui fait trois chefs principaux, ſur chacun deſquels nous établirons une Correction particulière.

Correction I.

377... Si la route qu'on a ſuivie, eſt voiſine de la ligne N & S ; c'eſt-à-dire, ſi elle eſt entre le N-N-O & le N-N-E, ou entre le S-S-O & le S-S-E, l'erreur en latitude doit être principalement attribuée à la meſure du chemin ; parce que celle qu'on auroit commiſe ſur le rumb de vent, à moins qu'elle ne ſoit très-conſidérable, ne peut produire qu'un très-petit effet ſur la latitude, ainſi qu'on peut s'en convaincre, en jettant les yeux ſur une Carte hydrographique ou ſur le Quartier de réduction.

378... Dans ce cas, il eſt donc important de donner une attention particuliere à la variation de l'aiguille aimantée, afin d'avoir l'angle du rumb de vent avec toute l'exactitude poſſible, puiſque l'uſage des obſervations de latitude ne peut alors diriger le navigateur que pour la Correction de la diſtance.

379... Pour exécuter cette Correction ſur le

Quartier de réduction, on fera convenir la différence en latitude déduite de l'observation, avec le rumb de vent qu'on a suivi, & l'on aura la distance corrigée, ainsi que les milles courus à l'Est & à l'Oueſt qui conviennent à cette diſtance. Le reſte de l'opération s'achève comme à l'ordinaire.

EXEMPLE.

380... Etant parti de 20°. 30′ de latitude Nord, & de 69°. 50′ de longitude occidentale de Paris, on a fait 85 lieues au N¼N-E corrigé de la variation & de la dérive; & ayant obſervé la hauteur méridienne du ſoleil à la fin de la route, on s'eſt trouvé par 25°. 10′ de latitude Nord : on demande le chemin corrigé & la longitude d'arrivée auſſi corrigée.

Cette route calculée, d'après l'eſtime telle qu'elle doit être au moment de l'obſervation, donne ſur le Quartier de reduction,

4°. 10′ pour différence en latitude.
24. 40′ pour latitude d'arrivée eſtimée.
68. 57′ pour longitude d'arrivée eſtimée.

Route corrigée d'après l'Obſervation.

Lat. de départ....N 20°. 30′	Long. de d...O 69°. 50′
Lat. d'ar. obſerv..N 25. 10′	Dif. en l. cor. E 1°. 0′ 36″
Dif. en lat.. obſ...N 4°. 40′	L. d'ar. obſ. O 68°. 49′ 24″
Som. des latitud.....45°. 40′	
Moyen paral........ 22. 50′	

Le chemin corrigé eſt donc 95, 4 de lieue au lieu de 85, qu'on croyoit avoir faites d'après le témoignage du lock.

381 ... *Solution Trigonométrique.*

D'aprés l'obſervation.

Le co-ſinus du rumb de vent 11°. 15′
eſt au rayon
comme la différence en latit. obſervée 4°. 40′,
eſt à la longueur de la rôute 285′, 4 = 95 lieues & un dixième.

Le rayon
eſt à la tangente de 11°. 15′,
comme la differ. des latit. croiſ. 304′
eſt à la différence en longitude 60′, 4 = 1°. 0′ 24″.

Obſervation particulière.

382 ... Lorſque la route eſt très-voiſine de la ligne Nord & Sud, il faut s'en tenir au rumb de vent eſtimé, ſur-tout ſi la différence en latitude obſervée eſt plus petite que l'eſtimée. Mais ſi la différence en latitude eſt plus grande que l'eſtimée, & ſi en même tems l'angle du rumb de vent approche de 22°. 30′, il eſt néceſſaire alors de faire tomber une petite partie de la Correction ſur le rumb de vent. Pour cela, on ajoutera un ou deux dixièmes de l'erreur en latitude à la différence en latitude eſtimée, ſelon

que la direction de la route sera moins ou plus éloignée de la ligne Nord & Sud ; & pour trouver l'angle du rumb de vent, on cherchera le quatrième terme de cette proportion :

La différence en latit. estimée, augmentée,
est à la différ. en latit. observée,
comme le co-sinus du rumb de vent estimé,
est au co-sinus du rumb de vent corrigé.

Avec le rumb de vent corrigé, on fera convenir sur le Quartier la différence en latitude observée ; ce qui donnera le chemin corrigé : le reste de l'opération s'achève comme à l'ordinaire.

Correction II.

383... Si la route est très-voisine de la ligne Est & Ouest ; c'est-à-dire, si elle est comprise entre l'O-N-O & l'O-S-O, ou entre l'E-N-E & l'E-S-E, alors l'erreur en latitude doit être principalement attribuée au rumb de vent ; car les erreurs commises sur la mesure de la distance, influent d'autant moins sur la latitude, que l'angle du rumb de vent approche plus de 90°., puisque la direction de la route étant alors presque parallèle à la ligne Est & Ouest, on doit avancer beaucoup en longitude & très-peu en latitude.

On ne sauroit donc être trop attentif à la mesure du sillage qui, dans ce cas, influe si fort sur la longitude, afin de pouvoir rejetter

avec confiance ſur le rumb qu'on a ſuivi, la plus grande partie de l'erreur en latitude qui ſert à faire les corrections.

384... Pour exécuter cette ſeconde correction ſur le Quartier, on peut faire convenir la différence en latitude obſervée, avec la différence en longitude eſtimée, ce qui corrige le rumb de vent & les milles de diſtance; ou bien faire convenir les milles de diſtance avec la différence en latitude obſervée, & l'on aura le rumb de vent & la différence en longitude corrigée. C'eſt au pilote intelligent à juger, dans l'occaſion, laquelle de ces deux pratiques convient le mieux.

EXEMPLE.

385... Etant parti de 34°. 10' de latitude Sud, & de 13°. 30' de longitude orientale de Paris, on a couru par eſtime 120 lieues ſur le rumb de vent O$\frac{1}{4}$N-O 4°. O corrigé de la variation & de la dérive; & à la fin de cette route, ayant obſervé la hauteur du pole, on s'eſt trouvé par 32°. 55' de latitude Sud: on demande le point d'arrivée corrigé.

Le calcul de la route, d'après l'eſtimée, donne ſur le Quartier de réduction,

$$\left\{\begin{array}{ll} 0^\circ.\ 45'\ 0'' & \text{pour différ. en latit. eſtimée.} \\ 33.\ 25.\ 0 & \text{pour latit. d'arrivée eſtimée.} \\ 5^\circ.\ 22.\ 30'' & \text{pour long. d'arrivée eſtimée.} \end{array}\right.$$

En faiſant convenir ſur le Quartier les milles

de distance, avec la différence en latitude observée 1°. 15′ = 75′, on aura la route corrigée comme il suit :

Route corrigée d'après l'Observation.

Latit. de départ...S 34°. 10′	Long. de dé..E 13°. 30′ 0″
Lat. d'ar. observ..S 32. 55′	Dif. en l. cor.O 7°. 2′ 6″
Dif. en lat. ob.....N 1°. 15′	L. d'ar. cor...E 6°. 28′ 54″
Som. des lat....... 67°. 5′	
Moyen parallèle.....33. 32′	

Rumb de vent corrigé, O¼N-O 45′ Nord.

386... *Solution Trigonométrique d'aprés l'Observation.*

La longueur de la route 120 *lieues* = 360 *milles*
est à la différence en latitude observée 1°. 15′ = 75′,
comme le rayon
est au co-f. du rumb de vent 77°. 59′ = O¼*N-O* 46′ *Nord.*

Le rayon
est à la tangente du rumb de vent 77°. 59′,
comme la différence des latitudes crois. 93′
est à la différence en longitude 336′, 9 = 7°. 6′ 54″.

Observation particulière.

387... Quoique nous ayons dit ci-dessus que

dans les routes voisines de la ligne Est & Ouest, l'erreur en latitude ne provienne pas, ou participe peu de l'erreur commise sur la mesure de la distance, il ne s'en suit pas qu'il n'y ait d'autres corrections à faire à l'estime que celles qui dépendent du rumb de vent, puisqu'alors les erreurs sur la mesure du chemin contribuent si fort à augmenter ou à diminuer la différence en longitude, laquelle il importe essentiellement de connoître pour déterminer le point d'arrivée.

D'après ces considérations, on peut donc établir que si la direction de la route est éloignée de près de deux rumbs de vent de la ligne Est & Ouest, on doit alors faire tomber une partie de la Correction sur la distance. Pour cela, on prendra huit ou neuf dixiemes de l'erreur en latitude, qu'on ajoutera à la différence en latitude estimée, ou qu'on en retranchera, selon qu'elle sera plus petite ou plus forte que la différence en latitude observée. Ensuite pour trouver le chemin corrigé, on fera cette proportion :

Différence en latitude estimée, augmentée ou diminuée,
est à la différ. en latit. observée,
comme la distance estimée.
est à la distance corrigée.

Faisant convenir sur le Quartier la distance corrigée, avec la différence en latitude observée, on aura le rumb de vent & les milles Est & Ouest corrigés: ces milles, réduits en lieues majeures

ſur le moyen parallèle, donneront la longitude d'arrivée corrigée.

Correction III.

388... Dans les routes intermédiaires, & dont la direction approche plus de 45°. que des lignes Nord & Sud, Eſt & Oueſt; c'eſt-à-dire, dans les routes compriſes entre N-N-E & l'E-N-E, entre le N-N-O & l'O-N-O, ou entre le S-S-E & l'E-S-E, entre le S-S-O & l'O-S-O, l'erreur en latitude étant ſenſée provenir du rumb & de la diſtance tout à-la-fois, on partagera cette erreur en deux parties, dont l'une ſera attribuée à la longueur du chemin, & l'autre au rumb de vent. La difficulté ne conſiſte donc que dans la manière de partager l'erreur totale entre les deux cauſes qui peuvent la produire. Pour nous guider dans cette recherche, voici les obſervations générales qu'on peut faire.

I.

389... Si l'on a des raiſons de croire que la rumb de vent & la diſtance ont été eſtimés trop petits, ayant reconnu par obſervation que l'erreur en latitude eſt par défaut, on attribuera à la diſtance un peu plus que l'erreur en latitude, & l'on donnera au rumb de vent l'excédent de cette quantité ſur l'erreur totale.

Si au contraire l'erreur en latitude eſt par excès, c'eſt au rumb de vent qu'il faut attribuer

plus que l'erreur en latitude, & l'excédent à la mesure de la distance.

La raison de cette règle est évidente, si l'on fait attention que, la distance restant la même, on ne peut augmenter l'angle du rumb de vent, sans diminuer la différence en latitude, & réciproquement : mais puisqu'on suppose, dans le premier cas, qu'il faut l'augmenter d'une certaine quantité, il faut donc que l'erreur commise sur la distance soit capable de produire non-seulement l'erreur en latitude, mais encore la quantité dont cette erreur se trouve diminuée par l'angle du rumb de vent qu'on a estimé trop petit.

I I.

390 . . . Si, au contraire, on a lieu de croire que le rumb de vent & la distance ont été estimés trop grands, & qu'on ait trouvé par observation que l'erreur en latitude est par défaut, on attribuera au rumb de vent plus que l'erreur en latitude, & l'excédent de cette quantité sur l'autre, à la distance, mais si l'erreur en latitude est par excès, les deux autres quantités restant les mêmes, on fera le contraire de ce qui vient d'être prescrit.

En effet, plus l'angle du rumb de vent sera estimé trop grand, plus l'erreur en latitude péchera par défaut. Ce qui fait paroître encore cette erreur plus petite qu'elle ne seroit réellement, si elle ne dépendoit que du rumb de vent, c'est l'excès de la distance ; c'est cette

partie de la route qui, ayant été estimée trop grande, contribue à diminuer l'erreur en latitude, provenant de la fausse estime du rumb de vent. C'est pour cette raison qu'on attribue au rumb de vent un peu plus que l'erreur en latitude; & qu'on ne fait tomber sur la distance que l'excédent de cette quantité sur l'autre.

III.

391... Si on a lieu de croire que la distance peche par défaut, & le rumb de vent par excès, puisqu'alors l'erreur faite sur chacun contribue à altérer la différence en latitude dans le même sens, on attribuera à chacun une partie de l'erreur en latitude, qu'on déterminera à l'aide des conjectures les plus plausibles qu'on pourra faire sur les circonstances de la route du vaisseau.

Nous allons éclaircir tout cela par des exemples.

EXEMPLE PREMIER.

392... Etant parti de 21°. 10' de latitude Sud, & de 50°. 50' de longitude orientale de Paris, on a couru par estime 23° lieues au S-O 5°. O: & ayant pris hauteur à la fin de cette route, on s'est trouvé par 23°. 50' de latitude Sud: mais on a lieu de croire qu'on a fait un peu plus de chemin, & que le rumb de vent portoit plus à l'Ouest. On demande comment

on doit corriger la distance & le rumb de vent, pour les faire convenir avec la latitude observée.

On voit d'abord, par l'énoncé du Problême, que la distance & le rumb de vent pechent par défaut. Comparant ensuite la différence en latitude estimée 2°. 28', avec l'observée 2°. 40', on voit encore que l'excès de celle-ci sur l'autre, ou que l'erreur en latitude 12' est aussi par défaut : cet exemple tombe donc dans le premier cas de la première observation (389) ; il faut donc attribuer à la distance un peu plus de 12', & l'excédent au rumb de vent.

Je suppose que, d'après l'examen de ce qui a pu occasionner l'erreur sur la distance, on ne puisse pas attribuer plus de 20' à cette cause ; on aura donc 20' pour l'erreur en latitude due à la route, & par conséquent 8', ou l'excédent de 20' sur 12 pour celle du rumb de vent.

Pour exécuter cette correction sur le Quartier, on ajoutera à la différence en latitude estimée les 20' attribuées à l'erreur de la distance ; & la faisant convenir ainsi augmentée avec le rumb de vent, on aura 261 milles pour distance corrigée. Avec cette distance corrigée, & la différence en latitude observée, on trouvera de la même manière que le rumb de vent corrigé est le S O 7°. 15' Ouest. Enfin, avec la différence en latitude observée & le rumb de vent corrigé, on trouvera que la différence en longitude corrigée est de 3°. 43' occidentale, & que la longitude d'arrivée corrigée est de 47°. 7' orientale.

393... On aura toujours la distance & le rumb de vent corrigés, avec plus de précision, par le calcul des analogies suivantes.

Le co-sinus du rumb de vent estimé 50°.
est au rayon,
comme la différence en latitude estimée & augmentée 168'
est à la distance corrigée 161', 3 *de mille.*

Différence en latitude estimée, augmentée 168,
est à la différence en latitude observée 160':
comme le co-sinus du rumb de vent estimé 50°.
est au co-sinus du rumb de vent corrigé 52°. 16',
= *S-O*, 7°. 16' *O.*

EXEMPLE II.

394... Etant parti de 33°. 30' de latitude Nord, & de 19°. 25' de longitude occidentale de Paris, on a couru 150 lieues au N-E$\frac{1}{4}$O 1°. Nord; & ayant observé la latitude à la fin de la route, on s'est trouvé par 40°. 12' de latitude Nord: mais, examen fait des circonstances de la route, on a tout lieu de croire que le rumb de vent & la distance péchent par excès; c'est-à-dire, qu'on a estimé la route trop à l'Est, & qu'on n'a pas fait autant de chemin qu'on le croit, d'après le témoignage du lock. Comment faut-il s'y prendre pour corriger le rumb & la

distance, afin de faire convenir l'un & l'autre avec la latitude d'arrivée observée.

En examinant l'état de la question & le calcul de la route estimée, on voit que cet exemple tombe dans le premier cas de la seconde observation (390), parce que le rumb & la distance pèchent par excès, & que l'erreur en latitude est par défaut; car si l'on compare la différence en latitude estimée 6°. 18', avec la différence en latitude observée 6°. 42', on trouvera que la première est plus petite que la seconde de 24'. Pour faire la Correction de cette route, on doit donc attribuer plus de 24' au rumb de vent, & l'excès de cette quantité sur l'autre, à la longueur de *la* route.

Supposons que, tout bien examiné, on ne puisse pas attribuer plus de 30' au rumb de vent; alors l'excédent de 30' sur 24 sera toute la quantité qu'il faut attribuer à l'erreur sur la distance.

En opérant sur le Quartier, on se conduira comme dans l'exemple précédent; on fera convenir la différence en latitude estimée, diminuée de 6', puisque la distance est estimée trop grande, avec le rumb de vent estimé, & l'on aura 442, 3 de mille = 147, 4 de lieu, pour la distance corrigée.

Avec cette distance ainsi corrigée, & la différence en latitude observée, on trouvera de la même manière que le rumb de vent corrigé est le N-N-E 2°. 10' Est. Enfin avec la différence en latitude observée, & le rumb de vent corrigé,

on aura 3°. 50′ pour la différence en longitude corrigée & réduite ; & 15°. 35′ pour la longitude d'arrivée corrigée.

395... Pour faire ces corrections par le calcul, on se servira des mêmes analogies que dans l'exemple précédent, avec cette différence, qu'au lieu d'augmenter la différence en latitude estimée, il faudra la diminuer de 6′; parce que la distance a été estimée pécher par excès.

co-s. du rumb de vent 32°. 45′ = N-E$\frac{1}{4}$N. 1°. Nord
est au Rayon,
comme la différence en latit. estimée, dimiuuée ; 6°. 12′ = 372′
est à la dist. corrigée 442, 3 = 147, 4 de lieue.

Différence en latitude estimée, diminuée, 372′,
est à la différence en latitude observee 6°. 42′. = 402′,
comme co-s. du rumb de vent estimé 32°. 45′
est au co-s. du rumb de vent corrigé 27°. 5′ = N-E$\frac{1}{4}$N. 6°. 40′ Nord.

EXEMPLE III.

396... Etant parti de 14°. 25′ de latitude Sud, & de 9° 40′ de longitude occidentale de Paris, on a fait 170 lieues au S E 3°. Sud ; & ayant observé, à la fin de la route, la hauteur méridionale du soleil, on s'est trouvé par 20°. 23′ de lalitude méridionale ; ma s, d'après l'exa-

men des circonſtances de la route, on préſume que la diſtance doit pécher par excès & le rumb de vent par défaut. On demande comment on doit corriger l'un & l'autre, afin de les faire convenir avec la latitude obſervée.

Le calcul de la route, d'après l'eſtime, me donne 6°. 19′ pour différence en latitude, & celle que me fournit l'obſervation eſt de 5°. 58′, plus foible que l'eſtimée de 21′. L'erreur en latitude eſt donc par excès: mais, après avoir examiné tous les élémens de la route, on préſume que la diſtance péche par excès, & le rumb de vent par défaut; c'eſt-à-dire que, puiſque la direction de la route approche de 45°, ces deux erreurs, quoique de différente eſpèce, contribuent néanmoins à altérer la latitude dans le même ſens: on eſt donc dans le cas de la troiſième obſervation (391).

397. Suppoſons maintenant que rien ne détermine à attribuer l'erreur en latitude, plutôt à la diſtance qu'au rumb de vent, dans ce cas, quoique je ne puiſſe pas ſoupçonner l'un plus que l'autre, j'attribuerai cependant un peu plus à la diſtance qu'au rumb de vent, uniquement à cauſe de l'imperfection & de l'inſuffiſance du lok, pour meſurer le ſillage du navire. Il n'en ſeroit pas de même, ſi l'on faiſoit uſage du ſillomètre. L'erreur en latitude étant de 21′, j'en attribue donc 12′ à la diſtance, & 9′ au rumb de vent. Enſuite je cherche, & ſur le Quartier de réduction & par le calcul, comme dans les exemples précédents, l'erreur

de la route & celle du rumb de vent, qui ont pu produire 12', plus 9' d'erreur sur la latitude; & je trouve 493', 8 = 164, 6 de lieue pour la route corrigée, & 43°. 34' = S-E 1°. 26' Sud, pour le rumb de vent corrigé; c'est-à dire, que, si la route n'avoit été estimée que de 164, 6 de lieue, l'erreur en latitude n'auroit été que de 9' par excès; & que si l'angle du rumb de vent avoit été estimé de 43°. 34', ces 9' d'erreur venant à disparoître, la latitude estimée auroit alors convenu avec l'observée.

Enfin, continuant l'opération, on trouve sur le Quartier 5°. 42' 24'' pour longitude d'arrivée corrigée; tandis que par le calcul on a 5°. 43' 24''.

C'est là le point où il est plausible de croire qu'on est arrivé; car il s'en faut de beaucoup qu'on puisse le regarder comme absolument sur, quelque attention qu'on ait eue à bien faire les Corrections indiquées ci-dessus; parce que ces Corrections, n'étant que des à-peu près, ne peuvent suppléer que foiblement à la connoissance des longitudes, tirée de l'observation immédiate des Astres.

398 ... *Solution Trigonométrique.*

Co-sinus du rumb de vent estimé 42°.
est au rayon,
comme la différence en latitude estimée, diminuée 6°. 7' = 367'.
est à la longueur de la route corrigée 493, 8 = 164, 6 *de lieue.*

La différence en latitude estimée, diminuée $= 367'$
est à la différence en latitude observée 5°. 58′ $= 358'$,
comme le co-sinus du rumb estimé 42°.
est au co-sinus du rumb de vent corrigé 43°. 34′ $=$ *S-E* 1°. 27′ *Sud.*

Le rayon ou tangente de 45°.
est à la tangente du rumb de vent corrigé 43°. 34′,
comme la difference des latitudes croissantes $= 375'$,
est à la différence en longitude corrigée 356′, 6 $=$ 5°. 56′ 36″.

FIN de la premiere Partie.

